Solution du partiel

Théorie des modèles des corps valués

11-18 février 2022

Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question précédente.

Problème 1. On travaille dans le language $\mathfrak{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}}$ avec trois sortes $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$. Soit $M \vDash \mathrm{ACVF}$ et $A = \mathrm{acl}(A) \subseteq M$. On définit un A-boule comme soit une boule (ouverte ou fermée) de rayon $\gamma \in \mathbf{\Gamma}(A)$ et de centre $a \in \mathbf{K}(A)$ ou une boule de la forme $a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a, d \in \mathbf{K}(A)$ et $\alpha \in \mathbf{k}(A)$ — on rappelle que les points sont des boules fermées de rayon ∞.

1. Soit b et b' des boules (de M) telles que $b \subset b'$ (strict!) et b soit de la forme $a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a, d \in \mathbf{K}(A)$ et $\alpha \in \mathbf{k}(A)$. Montrer que $a \in b'$.
2. Soit $\mathfrak{B}$ un filtre non principal engendré par des A-boules tel que $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathbf{K}(A) = \varnothing$. Montrer que $\mathfrak{B}$ est engendré par des A-boules avec un centre dans $\mathbf{K}(A)$.
3. Soit $c \in \mathbf{K}(M)$ et $\mathfrak{B}$ le filtre engendré par les A-boules qui contiennent c. Montrer que
$$\eta_{\mathfrak{B}|A} \vdash \mathrm{tp}(c/A).$$
4. Montrer qu'une boule (de M) est A-définissable si et seulement si c'est une A-boule.
5. Soit $\gamma \in \mathbf{\Gamma}(M)$ un uple. Montrer que toute boule $A\gamma$-définissable contient une boule A-définissable.

Solution.

1. Soit $x \in b$. On remarque tout d'abord que $b = b_{>\mathrm{v}(d)}(x)$ et donc $b' \supseteq b_{\geqslant \mathrm{v}(d)}(x)$. De plus, $x - a \in d\mathrm{res}^{-1}(\alpha) \subseteq d\mathcal{O}$ et donc $\mathrm{v}(x - a) \geqslant \gamma$. Il s'en suit que $a \in b_{\geqslant \mathrm{v}(d)}(x) \subseteq b'$.
2. Soit $b \in \mathfrak{B}$ une A-boule. Comme $\mathfrak{B}$ est non principal, il existe une A-boule $b' \supset b$. Si b' a un centre dans $\mathbf{K}(A)$, c'est aussi un centre de b. Sinon, b' est de la forme $a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a \in b \cap \mathbf{K}(A)$ par la question précédente.
3. Supposons tout d'abord que $\mathfrak{B}$ est engendré par une A-boule b sans centre dans $\mathbf{K}(A)$. En particulier, $b = a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a, d \in \mathbf{K}(A)$ et $\alpha \in \mathbf{k}(A)$ et soit $c' \vDash \eta_{\mathfrak{B}|A}$. On a alors $\mathbf{k}((c - a)/d) = \alpha$. Soit $P \in \mathbf{K}(A)\mathrm{v}[x]$ le polynôme minimal de α. Si $P \neq 0$, alors il admet une racine $e \in \mathbf{K}(A)^{\mathrm{a}} = \mathbf{K}(A)$ de résidu α. On a donc $ed + a \in b$ ce qui contredit notre hypothèse. Il s'en suit donc que $P = 0$ et tous les relèvements de α ont le même type sur A. En particulier, $(c - a)/d \equiv_A (c' - a)/d$ et donc $c \equiv_A c'$.
   Supposons maintenant que $\mathfrak{B}$ est engendré par une A-boule fermée b avec un centre $a \in \mathbf{K}(A)$ et de rayon $\mathrm{v}(d)$ pour un $d \in \mathbf{K}(A)$. Si $d = 0$, le type $\eta_{\mathfrak{B}|A}$ a une unique réalisation et la question est prouvée. Sinon, pour tout $c' \vDash \eta_{\mathfrak{B}|A}$, $(c' - a)/d \in \mathcal{O}$. Si $\alpha = \mathrm{res}(c' -$

$a)/d) \in \mathbf{k}(A)^{\mathrm{a}} = \mathbf{k}(A)$, alors $c' \in a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha) \supset b$, ce qui est absurde. Il s'ensuit que $\mathrm{res}((c'-a)/d)$ est transcendant sur $\mathbf{k}(A)$. Tous les éléments de $\mathcal{O}$ de résidu transcendant sur $\mathbf{k}(A)$ ont le même type sur A et donc $(c-a)/d \equiv_A (c'-a)/d$, *i.e.* $c \equiv_A c'$.
Suppose alors que $\mathfrak{B}$ que $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathbf{K}(A) = \varnothing$ et donc que $\mathfrak{B}$ est non principal. Par la question 2, $\mathfrak{B}$ est engendré par des boules de $\mathbf{K}(A)$. De plus, le polynôme minimal $P \in \mathbf{K}(A)[x]$ qui admet une racine dans M (et donc dans $\mathbf{K}(A)^{\mathrm{a}} = \mathbf{K}(A)$) est donc 0. Il s'ensuit donc que tous les $c' \in \overline{\mathfrak{B}}$ ont le même type sur A.
Enfin, on peut supposer qu'il existe $a \in \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathbf{K}(A) \neq \varnothing$ et que $\mathfrak{B}$ n'est pas engendré par une boule fermée de rayon dans $\mathbf{K}(A)$. Pour tout $c' \models \eta_{\mathfrak{B}|A}$, si $\mathrm{v}(c'-a) \in \mathbb{Q} \cdot \mathrm{v}\mathbf{K}(A) = \mathrm{v}\mathbf{K}(A)$, alors $c' \in b_{\geqslant \mathrm{v}(c'-a)}(a)$ et donc $c' \in b_{>\mathrm{v}(c'-a)}(a)$, ce qui est absurde. On a donc $\mathrm{v}(c'-a) \notin \mathbb{Q} \cdot \mathrm{v}\mathbf{K}(A)$. Comme $\mathrm{v}(c'-a) \geqslant \gamma$ si et seulement si $c \in b_{\geqslant\gamma}(a)$, le type de $\mathrm{v}(c'-a)$ sur $\mathbf{\Gamma}(A)$ ne dépend pas de c' et donc $c - a \equiv_A c' - a$, *i.e.* $c \equiv_A c'$.

4. Par 3 et compacité, tout ensemble A-définissable (en particulier une boule b) est une combinaison booléenne de A-boules. En particulier, c'est une union disjointe non trivialement imbriquée de fromage suisses dont les boules extérieures et les trous sont des A-boules. Par unicité de cette décomposition, la boule b est une A-boule.
5. Soit b une boule $A\gamma$-définissable. Par la question 4, c'est une $\mathrm{acl}(A\gamma)$-boule. C'est donc soit une boule de centre $a \in \mathbf{K}(A)$ — qui est donc bien une A-boule contenue dans b — soit une boule de la forme $a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a, d \in \mathbf{K}(\mathrm{acl}(A\gamma)) = \mathbf{K}(A)$ et $\alpha \in \mathbf{k}(\mathrm{acl}(A\gamma)) = \mathbf{k}(A)$ — qui est donc une A-boule. □

Problème 2. Soit $M \models \mathrm{ACVF}$ et $A \leqslant C \leqslant \mathbf{K}(M)$ des sous corps avec A sphériquement complet. Soit $V \leqslant C$ un sous-A-espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Une bonne base de V est une base $(b_i)_{i<n}$ telle que, pour tout $a_i \in A$, $\mathrm{v}(\sum_i a_i b_i) = \min_i \mathrm{v}(a_i b_i)$.

On suppose pour les questions 1 et 2 que V admet une bonne base $(b_i)_{i<n}$.

1. Montrer que V est sphériquement complet: tout filtre $\mathfrak{B}$ engendré par des boules de centre dans V et de rayon dans $\mathrm{v}V$ admet un point d'adhérence dans V.
2. Soit $x \in C$, montrer que $\{\mathrm{v}(x-e) : e \in V\}$ admet un maximum.
3. Montrer que V admet une bonne base.

Soit $E \leqslant M$ qui contient aussi A et telle que $\mathrm{v}C \cap \mathrm{v}E = \mathrm{v}A$ et que toute famille $A\mathrm{v}$-libre de $C\mathrm{v}$ l'est encore sur $E\mathrm{v}$.

4. Montrer que tout bonne base de V est une bonne base du E-espace vectoriel $E \cdot V$.
5. Monter que si $f : C \to M$ induit l'identité sur $A \cup C\mathrm{v} \cup \mathrm{v}C$, alors f s'étend en un morphisme $E \cdot C \to M$ qui fixe E.
6. Montrer que $\mathrm{tp}(E/A \cup C\mathrm{v} \cup \mathrm{v}C) \vdash \mathrm{tp}(E/C)$.

Solution.

1. Soit B une boule ouverte de V de centre $d = \sum_i a_i b_i$ et de rayon γ. Pour tout $x = \sum_i y_i b_i \in V$, on a $d + x \in B$ si et seulement si $\mathrm{v}(x) > \gamma$ si et seulement si, pour tout i, $\mathrm{v}(b_i) + \mathrm{v}(x_i) > \gamma$, si et seulement si, pour tout $\delta \in \mathrm{v}A$ tel que $\delta \geqslant \gamma - \mathrm{v}(b_i)$, $\mathrm{v}(x_i) \geqslant \delta$. Soit $\pi_i : \sum_i x_i b_i \mapsto x_i$. Il suit de la discussion qui précède que, pour tout filtre pseudo Cauchy $\mathfrak{B}$ sur V, $\mathfrak{B}_i := (\pi_i)_\star \mathfrak{B}$ est est un filtre pseudo Cauchy sur A et que $x = \sum_i x_i b_i \in \overline{\mathfrak{B}}$ si et seulement si, pour tout i, $x_i \in \overline{\mathfrak{B}_i}$. Pour tout i, on trouve $c_i \in \overline{\mathfrak{B}_i} \cap A$. On a alors $\sum_i x_i b_i \in \overline{\mathfrak{B}} \cap V$.

2. Soit $\mathfrak{B}$ le filtre engendré par les boules de V qui contiennent c. Par la question 1, il exists $e \in \overline{\mathfrak{B}} \cap V$. Pour tout $e' \in V$, si $\mathrm{v}(c-e') > \mathrm{v}(c-e)$, on a $\mathrm{v}(c-e) = \mathrm{v}(e-e')$ et donc $c \in b_{>\mathrm{v}(e-e')}(e') \in \mathfrak{B}$. Mais cette boule ne contient pas e, ce qui contredit que $e \in \overline{\mathfrak{B}}$. On a donc que $\mathrm{v}(c-e') \leqslant \mathrm{v}(c-e)$ qui est donc maximal.
3. On procède par induction sur n. Soit $W \leqslant V$ de dimension $n-1$. Par induction, W admet une bonne base $(b_i)_{i<n-1}$. Soit $c \in C \smallsetminus W$ et, par la question 2, $e \in W$ tel que $\mathrm{v}(c-e)$ soit maximal. On peut supposer que $e = 0$. Pour tout $w \in W$ et $a \in A^\times$, si $\mathrm{v}(ae) = \mathrm{v}(w)$, on a alors $\mathrm{v}(a) + \mathrm{v}(e) = \min\{\mathrm{v}(ae), \mathrm{v}(w)\} \leqslant \mathrm{v}(ae+w) = \mathrm{v}(a) + \mathrm{v}(e + a^{-1}w) \leqslant \mathrm{v}(a) + \mathrm{v}(e)$ et donc $\mathrm{v}(ae+w) = \min\{\mathrm{v}(ae), \mathrm{v}(w)\}$. Si $\mathrm{v}(ae) \neq \mathrm{v}(w)$, cette égalité est aussi vraie. Il s'ensuit qu'en posant $b_{n-1} = e$, $(b_i)_{i<n}$ est une bonne base de V.
4. Soient $(b_i)_i$ une bonne base de V et $e_i \in E$ non tous nuls. Soit I l'ensemble des indices tels que $\mathrm{v}(e_i b_i)$ est minimal. Si I est un singleton, alors $\mathrm{v}(\sum_i e_i b_i) = \min_i \mathrm{v}(e_i b_i)$. Supposons donc que I n'est pas un singleton et soient $i \neq j \in I$. On a alors $\mathrm{v}(e_i b_i) = \mathrm{v}(e_j b_j)$ et donc $\mathrm{v}(e_i) - \mathrm{v}(e_j) = \mathrm{v}(b_j) - \mathrm{v}(b_i) \in \mathrm{v}E \cap \mathrm{v}C = \mathrm{v}A$. Soit $a_j \in A$ tel que $\mathrm{v}(a_j)$ est cette valeur commune. Si $\mathrm{v}(\sum_{j\in I} e_j b_j) > \mathrm{v}(e_i b_i)$, on a $0 = \mathrm{res}(\sum_i (e_j e_i^{-1} a_j^{-1})(b_j b_i^{-1} a)) = \sum_i \mathrm{res}(e_j e_i^{-1} a_j^{-1}) \mathrm{res}(b_j b_i^{-1} a_j)$. Comme les $\mathrm{res}(e_j e_i^{-1} a_j^{-1})$ sont non nuls, il s'ensuit que les $\mathrm{res}(b_j b_i^{-1} a_j)$ ne sont pas libres sur $A\mathrm{v}$. Cependant, comme $(b_i)_i$ est une bonne base, pour tous $c_j \in \mathcal{O}^\times(A)$, $\mathrm{v}(\sum_{j\in I} c_j b_j b_i^{-1} a_j) = \min_j \mathrm{v}(c_j a_j^{-1} b_j) = 0$ et donc les $\mathrm{res}(b_j b_i^{-1} a_j)$ sont libres sur $A\mathrm{v}$. C'est donc absurde et $\mathrm{v}(\sum_i e_i b_i) = \mathrm{v}(\sum_{i\in I} e_i b_i) = \min_i \mathrm{v}(e_i b_i)$.
5. La seule option est de définir $g_K(\sum_i e_i c_i) = \sum_i e_i f(c_i)$, pour tout $e_i \in E$ et $c_i \in C$. Il nous faut donc vérifier que g est bien défini et que c'est un morphisme de corps valué. Notons tout d'abord que f est l'identité sur $A \cup C\mathrm{v} \cup \mathrm{v}C$ et donc $D := f(C)$ est une extension de A telle que $\mathrm{v}D \cap \mathrm{v}E = \mathrm{v}A$ et que toute famille $A\mathrm{v}$-libre de $D\mathrm{v}$ l'est encore sur $E\mathrm{v}$. Soit b_j une bonne base du A-espace vectoriel engendré par les c_i. On a alors $c_i = \sum_j a_{ij} b_j$ et donc $\mathrm{v}(\sum_i e_i c_i) = \mathrm{v}(\sum_{ij} e_i a_{ij} b_j) = \min_j \mathrm{v}(\sum_i e_i a_{ij}) + \mathrm{v}(b_j) = \min_j \mathrm{v}(\sum_i e_i a_{ij}) + \mathrm{v}(f(b_j)) = \mathrm{v}(\sum_i e_i f(c_i)) = \mathrm{v}(g(\sum_i e_i c_i))$. Comme $\sum_i e_i c_i = 0$ si et seulement si $\mathrm{v}(\sum_i e_i f(c_i)) = \infty$, cela conclut la preuve.
6. Soit $E' \equiv_{A\cup C\mathrm{v}\cup\mathrm{v}C} E$. Il existe donc $C' \leqslant M$ tel que $E'C' \equiv_{A\cup C\mathrm{v}\cup\mathrm{v}C} EC$. Comme $C' \equiv_{A\cup C\mathrm{v}\cup\mathrm{v}C} C$, par la question 5, $E'C' \equiv_{A\cup C\mathrm{v}\cup\mathrm{v}C} E'C$ et donc $EC \equiv E'C$. $\square$