Partiel

Théorie des modèles des corps valués

11-18 février 2022

Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question précédente.

Problème 1. On travaille dans le language $\mathfrak{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}}$ avec trois sortes $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$. Soit $M \vDash \mathrm{ACVF}$ et $A = \mathrm{acl}(A) \subseteq M$. On définit un A-boule comme soit une boule (ouverte ou fermée) de rayon $\gamma \in \mathbf{\Gamma}(A)$ et de centre $a \in \mathbf{K}(A)$ ou une boule de la forme $a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a, d \in \mathbf{K}(A)$ et $\alpha \in \mathbf{k}(A)$ — on rappelle que les points sont des boules fermées de rayon ∞.

1. Soit b et b' des boules (de M) telles que $b \subset b'$ (strict!) et b soit de la forme $a + d\mathrm{res}^{-1}(\alpha)$ avec $a, d \in \mathbf{K}(A)$ et $\alpha \in \mathbf{k}(A)$. Montrer que $a \in b'$.
2. Soit $\mathfrak{B}$ un filtre non principal engendré par des A-boules tel que $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathbf{K}(A) = \varnothing$. Montrer que $\mathfrak{B}$ est engendré par des A-boules avec un centre dans $\mathbf{K}(A)$.
3. Soit $c \in \mathbf{K}(M)$ et $\mathfrak{B}$ le filtre engendré par les A-boules qui contiennent c. Montrer que
$$\eta_{\mathfrak{B}|A} \vdash \mathrm{tp}(c/A).$$
4. Montrer qu'une boule (de M) est A-définissable si et seulement si c'est une A-boule.
5. Soit $\gamma \in \mathbf{\Gamma}(M)$ un uple. Montrer que toute boule $A\gamma$-définissable contient une boule A-définissable.

Problème 2. Soit $M \vDash \mathrm{ACVF}$ et $A \leqslant C \leqslant \mathbf{K}(M)$ des sous corps avec A sphériquement complet. Soit $V \leqslant C$ un sous-A-espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Une bonne base de V est une base $(b_i)_{i<n}$ telle que, pour tout $a_i \in A$, $\mathrm{v}(\sum_i a_i b_i) = \min_i \mathrm{v}(a_i b_i)$.

On suppose pour les questions 1 et 2 que V admet une bonne base $(b_i)_{i<n}$.

1. Montrer que V est sphériquement complet: tout filtre $\mathfrak{B}$ engendré par des boules de centre dans V et de rayon dans $\mathrm{v}V$ admet un point d'adhérence dans V.
2. Soit $x \in C$, montrer que $\{\mathrm{v}(x - e) : e \in V\}$ admet un maximum.
3. Montrer que V admet une bonne base.

Soit $E \leqslant M$ qui contient aussi A et telle que $\mathrm{v}C \cap \mathrm{v}E = \mathrm{v}A$ et que toute famille $A\mathrm{v}$-libre de $C\mathrm{v}$ l'est encore sur $E\mathrm{v}$.

4. Montrer que tout bonne base de V est une bonne base du E-espace vectoriel $E \cdot V$.
5. Monter que si $f : C \to M$ induit l'identité sur $A \cup C\mathrm{v} \cup \mathrm{v}C$, alors f s'étend en un morphisme $E \cdot C \to M$ qui fixe E.
6. Montrer que $\mathrm{tp}(E/A \cup C\mathrm{v} \cup \mathrm{v}C) \vdash \mathrm{tp}(E/C)$.