École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n^{o}1

Exercice 1 *Lemme de prolongation*
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ et soit

$$X' = f(X)$$

l'équation différentielle associée. Soit $X :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une solution de cette équation. Montrer que si il existe un compact K tel que $\forall t \in]a, b[, \ X(t) \in K$ alors la limite $\lim_{t \to b} X(t)$ existe.

Exercice 2 *Équations différentielles linéaires*
Soit A une matrice appartenant à $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_A) \ : \ \dot{X} = A \cdot X$$

Un portrait de phase de l'équation E_A est un dessin dans $\mathbb{R}^2$ des ses trajectoires.

1. Tracer le portrait de phase de l'équation

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$$

2. Soit P une matrice de $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. Montrer que le portrait de phase de l'équation associée à PAP^{-1} est l'image du portrait de phase de l'équation associée à A par la matrice P.
3. Lister toutes les classes de similitude dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Pour chaque classe de similitude, tracer le portait de phase de l'équation différentielle associée.

Exercice 3 *Fonctions quadratiques*
On s'intéresse dans cette exercice à la famille de systèmes dynamiques

$$f_\mu := x \mapsto \mu x(1 - x).$$

1. Quels sont les points fixes de f_μ ? Discuter de ce qu'ils sont attractifs/répulsifs en fonction de la valeur de μ.
2. Si $1 < \mu < 3$, décrire complètement la dynamique de f_μ.

3. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, f_μ et f_λ ne sont pas $\mathcal{C}^1$-conjuguées.
4. Montrer que si $\mu < 4$, f_μ n'est pas topologiquement conjugué à f_4.
5. Montrer que si $0 < \lambda \leq 1$ et $1 < \mu$, f_μ et f_λ ne sont pas topologiquement conjuguées.
6. Montrer que si $\lambda, \mu \in]1, 2[$ alors f_μ et f_λ sont conjugués.

On suppose maintenant que $\mu > 4$.

7. Montrer que f_μ a un point périodique x_2 d'ordre 2 appartenant à l'intervalle $[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}]$. Est-il répulsif, attractif ?
8. Montrer que f_μ a un point périodique d'ordre 3.
9. Montrer que l'ensemble $\Lambda = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ f_\mu^n(x) \in [0, 1]\}$ est un ensemble de Cantor.

Exercice 4
Trouver un exemple d'homéomorphisme $f : X \longrightarrow X$ d'un espace métrique compact (X, d) tel que pour tout couple $(x, y) \in X^2$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \to 0.$$

Exercice 5 *L'action de* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{RP}^1$*.*
Soit A dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Cette matrice induit un homémorphisme

$$\psi_A : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$$

On dit que A a un point fixe stable si il existe $U \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ un voisinage de A et $f : U \longrightarrow \mathbb{RP}^1$ continue telle que

$$\forall X \in U,\ \psi_X(f(X)) = f(X).$$

Montrer que A a un point fixe stable si et seulement si $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$.

Exercice 6 *Un aperçu de théorie ergodique.*
On note le quotient $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que $\mathbb{T}$ est une variété compacte de dimension 2.
2. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est invariante par l'action de $\mathbb{Z}^2$ et définit par conséquent une mesure μ sur $\mathbb{T}$.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on note $\varphi_\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ le flot donné par $\varphi(t, \vec{x}) = \vec{x} + t(\cos\theta, \sin\theta)$.

3. Montrer que φ_θ a une orbite périodique si et seulement si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.
4. On suppose que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour tout point $x \in \mathbb{T}$
$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_\theta(t, x))dt \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{T}} f d\mu.$$
5. En déduire que si $A \subset \mathbb{T}$ est invariante par φ_θ (*i.e.* $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_\theta(t, A) \subset A$) alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(\mathbb{T} \setminus A) = 0$.