École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n$^{\text{o}}$2

Exercice 1 *Stablilité d'orbites périodiques pour les flots.*
Soit $f_\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une famille de champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ variant de manière $\mathcal{C}^\infty$ en fonction de $\mu \in \mathbb{R}$; on considère les équations différentielles associées

$$(E_\mu) \ : \ X'(t) = f_\mu(X(t))$$

et on note $\varphi(t, x, \mu) = \varphi_\mu(t, x)$ leur flots respectifs. On suppose qu'un point x_0 est orbite périodique de période minimale $T_0 > 0$ pour $\mu = 0$.

1. Montrer qu'il existe un ouvert $U' \subset U$ sur lequel les applications de premier retour $\varphi(\mu, \cdot) : U' \longrightarrow U$ sont bien définies et dépendent de manière lisse du paramètre (μ, x), et que le temps de premier retour $t(x, \mu)$ dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de x et μ.

On suppose que la différentielle partielle $D_x\varphi_{|(\mu,x)=(0,x_0)}$ est non-dégénérée au sens où 1 n'en est pas une valeur propre.

2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et un chemin lisse $\gamma :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et tel que pour tout $\mu \in]-\alpha, \alpha[$, $\gamma(\mu)$ est un point périodique du flot de f_μ.

Exercice 2 *Un exemple de bifurcation*
On considère dans cet exercice la famille de fonctions

$$f_\mu(x) = -\mu x + ax^2 + bx^3$$

1. Montrer que pour $\mu < 1$, 0 est un point fixe attractif de f_μ. Que (ne) se passe-t-il (pas) quand $\mu \geq 1$?

On va s'intéresser à ce qui se passe en détail quand $\mu > 1$. On fait l'hypothèse que $2a^2 + b \neq 0$.

2. Écrire le développement limité de f_μ^2 à l'ordre 3 en 0. Faire un dessin et conjecturer le comportement dynamique près de $\mu = 1^+$.
3. En étudiant la fonction $M(\mu, x) = \frac{f_\mu^2(x) - x}{x}$, montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une fonction $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que
   — $\alpha(0) = 1$;
   — pour tout $x \in]-\epsilon, \epsilon[$, x est un point de période 2 pour $f_{\alpha(x)}$;

   et donner un développement limité de α à l'ordre 2.
4. Discuter de l'attractivité/répulsivité de x pour $f_{\alpha(x)}$.

Exercice 3 *Homéomorphismes du cercle*
On note dans cette exercice $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle et r_α la rotation d'angle α pour $\alpha \in [0,1[$.

1. Décrire l'ω-limite d'un point quelconque pour r_α en fonction de α.

On considère maintenant $\mathbb{RP}^1$ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par 0, *l'espace projectif réel* de dimension 1. Formellement $\mathbb{RP}^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à S^1.

N'importe quelle matrice $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ induit une fonction $f_A : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$.

3. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, f_A est un homéomorphisme.
4. Montrer que si A et B sont conjuguées, alors f_A et f_B sont conjuguées.
5. Décrire l'ω-limite d'un point quelconque pour f_A en fonction de la classe de similitude f_A.

Le reste de l'exercice sera consacré à la construction d'un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ du cercle ayant la propriété qu'il existe un Cantor de S^1 qui est l'ω-limite de tout point. On considère une rotation r_α d'angle irrationnel et une suite décroissante quand $|n| \to \infty$, $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} l_i = 1$. On fixe $x_0 \in S^1$ quelconque.

6. On définit
$$a_n = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \text{ tels que} \\ r_\alpha^k(x_0)\in[x_0, r_\alpha^n(x_0))}} l_k$$
et $b_n = a_n + l_n$. Montrer que les intervalles $[a_n, b_n]$ sont deux à deux disjoints.
7. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est de mesure pleine dans $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue.
8. Montrer que la fonction g définie par
$$g(x) = 1 + 6\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n^3}(b_n - x)(a_n - x)$$
si $x \in [a_n, b_n]$ et qui vaut 1 partout ailleurs est continue et d'intégrale 1.
9. Montrer que la fonction $f : S^1 \longrightarrow S^1$ définie par $f(x) = a_1 + \int_0^x g(t)dt$ est un homéomorphisme de S^1 de classe $\mathcal{C}^1$ dont l'ω-limite de tout point est un certain Cantor.