École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n^{o}3

Exercice 1 *Le pendule.*
On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_0)\ \ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$

1. Montrer que θ est solution de l'équation (E_0) si et seulement si le couple $(\theta, \dot{\theta})$ est solution de l'équation

$$(E') \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x \end{aligned}$$

2. Montrer que les solutions de (E_0) sont définies pour tout temps.
3. Montrer que la fonction $V = -\cos\theta + \frac{1}{2}(\dot{\theta})^2$ est constante le long des trajectoires.
4. En déduire un portrait de phase de l'équation (E_0).

On s'intéresse maintenant à l'équation du pendule avec frottement :

$$(E_1)\ \ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin\theta = 0,\ \gamma > 0$$

On rappelle qu'une *fonction de Lyapunov* d'un flot est une fonction décroissante le long des orbites du flot.

5. Montrer que la fonction "d'énergie" $F(x, y) = -\cos(x) + \frac{1}{2}y^2$ est une fonction de Lyapunov pour le flot de l'équation différentielle (E_1') en dimension 2 associée.
6. Décrire les points asymptotiquement stables du système (E_1').
7. Montrer que toute trajectoire converge vers un point asymptotiquement stable.

Exercice 2 *Le solénoïde.*
Soit M un espace topologique compact et $\varphi : M \longrightarrow M$ une transformation continue de M. On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset M$ tel que $\overline{\varphi(U)} \subset U$.

1. Montrer que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varphi^n(U)}$ est un compact invariant pour φ (*i.e.* $\varphi(K) = K$).
2. Montrer que K est asymptotiquement stable.

On note désormais $T = S^1 \times D^2$ où S^1 est le cercle $[0,1]/_{0\sim 1}$ et D^2 est le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On définit aussi pour une constante $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ l'application $F : T \longrightarrow T$ par

$$F(\varphi, x, y) = (2\varphi, \lambda x + \frac{1}{2}\cos 2\pi\varphi, \lambda y + \frac{1}{2}\sin 2\pi\varphi)$$

3. Montrer que $F(T) \subset \mathrm{int}(T)$.
4. Soit $S = \bigcap_{n \in N} F^n(T)$. Montrer que la restriction de F à S est bijective.

On note E l'ensemble des suites $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots)$ de $(S^1)^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\phi_i = 2\phi_{i+1}$ muni de la trace de la topologie produit de $(S^1)^{\mathbb{N}}$. Soit $s \in S$, on définit $h(s) = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots)$ telle que $F^{-n}(s) = (\phi_n, x_n, y_n)$.

5. Montrer que $h : S \longrightarrow E$ est un homéomorphisme.
6. Trouver tous les points fixes et les points périodiques de F d'ordre 2.

Exercice 3 *Trajectoires périodiques d'un flot préservant une énergie.*
Soit X un champ de vecteur lisse de $\mathbb{R}^n$ telle que $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction lisse invariante par le flot de X. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point périodique de plus petite période $t_0 >$ tel que $E(x_0) = 0$, $dE(x_0) \neq 0$ et la différentielle de l'application de premier retour en x_0 restreinte à $E^{-1}(\{0\})$ est non-dégénérée au sens ou 1 n'en est pas valeur propre.
Montrer qu'il existe un plongement du cylindre $]-1,1[\times S^1$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

- l'image de $\{0\} \times S^1$ est l'orbite périodique de X à laquelle x_0 appartient ;
- pour tout $\alpha \in]-1,1[$, $\{\alpha\} \times S^1$ est une orbite périodique du champ de vecteur X.