École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n$^{\text{o}}$4

Exercice 1 *Orbites positives denses.*
Montrer que si $f : X \longrightarrow X$ est un homéomorphisme d'un espace métrique compact sans points isolé. Montrer que si f a une orbite dense, alors f a une orbite positive dense.

Exercice 2 *Le solénoïde.*
Soit M un espace topologique compact et $\varphi : M \longrightarrow M$ une transformation continue de M. On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset M$ tel que $\overline{\varphi(U)} \subset U$.

1. Montrer que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varphi^n(U)}$ est un compact invariant pour φ (*i.e.* $\varphi(K) = K$).
2. Montrer que K est asymptotiquement stable.

On note désormais $T = S^1 \times D^2$ où S^1 est le cercle $[0,1]/_{0\sim 1}$ et D^2 est le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On définit aussi pour une constante $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ l'application $F : T \longrightarrow T$ par

$$F(\varphi, x, y) = (2\varphi, \lambda x + \frac{1}{2}\cos 2\pi\varphi, \lambda y + \frac{1}{2}\sin 2\pi\varphi)$$

3. Montrer que $F(T) \subset \mathrm{int}(T)$.
4. Soit $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(T)$. Montrer que la restriction de F à S est bijective.

On note E l'ensemble des suites $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots)$ de $(S^1)^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\phi_i = 2\phi_{i+1}$ muni de la trace de la topologie produit de $(S^1)^{\mathbb{N}}$. Soit $s \in S$, on définit $h(s) = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots)$ telle que $F^{-n}(s) = (\phi_n, x_n, y_n)$.

5. Montrer que $h : S \longrightarrow E$ est un homéomorphisme.
6. Trouver tous les points fixes et les points périodiques de F d'ordre 2.
7. Montrer que F restreint à S est topologiquement transitif.

Exercice 3
Soit X un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. On suppose qu'il existe au moins deux orbites. Montrer que si f a un point asymptotiquement stable, alors f n'est pas topologiquement transitif.

Exercice 4 *Un homéomorphisme du tore.*
On considère l'application $f : (x, y) \mapsto (x + \alpha, x + y)$ induite sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ pour un α irrationnel.

1. Montrer que f est un homéomorphisme topologiquement transitif.
2. Montrer que f est minimal. On pourra remarquer que $\mathcal{O}((x, y)) = \mathcal{O}((x, y')) + (0, y - y')$ pour tout x, y et y'.

Exercice 5 *Échanges d'intervalles.*
Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs tels que $\sum \alpha_i = 1$. On note $\beta_0 = 0$,$\beta_i = \sum_{j \leq i} \alpha_i$ et $I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i[$. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une permutation.

$$\alpha^\tau = (\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, \alpha_{\tau^{-1}(n)})$$

et β^τ associé de la même manière à α^τ.
On appelle échange d'intervalle associé à (α, τ) l'application continue par morceau de $[0, 1[$ définie sur I_i par $x \mapsto x - \beta_{i-1} + \beta^\tau_{\tau(i)-1}$.
On dit qu'une permutation τ est *irréductible* si il n'existe pas de $k < n$ tel que $\tau(\{1, \cdots, k\}) = \{1, \cdots, k\}$.

On veut montrer le théorème suivant

Théorème 5.1 (Keane, 1975)**.** *Si l'unique relation linéaire sur les α_i sur $\mathbb{Q}$ est $\sum \alpha_i = 1$ et si τ est irréductible, l'(α, τ)-échange d'intervalle est minimal.*

1. Montrer qu'un échange d'intervalle défini bien une bijection de $[0, 1[$ dans lui-même.
2. Montrer le théorème quand $n = 2$.
3. Montrer que si τ n'est pas irréductible, tout échange d'intervalle de permutation τ n'est pas topologiquement transitif.

On va maintenant prouver un critère de minimalité sur un échange d'intervalle f. On fait les deux hypothèses suivantes

— f n'a pas d'orbite périodiques ;
— si F est une union finie d'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite dont les points extrémaux se situent dans l'ensemble

$$D^\infty = \bigcup_i \mathcal{O}(\beta_i) \cup \{1\}$$

l'union des orbites des points de discontinuité ; et tel que $f(F) = F$ alors $F = [0, 1[$ ou $\emptyset$.

On va montrer qu'alors f est minimal. Supposons qu'au contraire il existe x tel que $\mathcal{O}(x)$ n'est pas dense.

4. Montrer qu'il existe $[a, b[\subset [0, 1[\backslash \overline{\mathcal{O}(x)}$ tels que ni a ni b n'appartient à D^∞.
5. Soit $D = \{\beta_1, \cdots, \beta_n, a, b\}$. Pour $y \in D$, on note $k(y) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid f^{-n}(y) \in [a, b[\}$. L'ensemble des $\{f^{-k(y)}(y) \mid k(y) < \infty\}$ partitionne en un nombre fini de sous intervalles fermés à gauche ouverts à droite $J_1, \cdots, J^m$. Montrer que l'union des images des $(J_k)_{k \leq m}$ est invariante par f.
6. Montrer que f est minimal.
7. En appliquant le critère précédemment démontré, prouver que si les orbites des éléments de $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ sont disjointes et infinies, f est minimal.
8. En déduire théorème de Keane.