École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n^{o}5

Exercice 1 *Chaînes de Markov topologiques.*
Dans cet exercice, $A \in \mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients sont dans $\{0, 1\}$. On note Ω_N l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ et $\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N \mid \forall i \in \mathbb{Z},\ A_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1\}$.
On fait l'hypothèse supplémentaire que A est *irréductible*, c'est à dire que pour tout couple (i, j), il existe une puissance de A dont le coefficient en position (i, j) est strictement positif.

1. Donner une interprétation de l'ensemble ω_A en terme de graphe.
2. On note $\sigma : \Omega_N \longrightarrow \Omega_N$ l'opérateur de décalage, *i.e.* $\omega' = \sigma(\omega)$ est définie par $\omega'_{i+1} = \omega_i$. Montrer que $\sigma(\Omega_A) = \Omega_A$.
3. Un mot m est dit *admissible* si il existe un élément de Ω_A dont il est une sous-séquence. Montrer que le nombre de mots admissibles de longueur l est égal au coefficient en place (x, y) de A^l.
4. Montrer que dans ce cas σ_A est topologiquement transitif.

On suppose maintenant A est *transitive*, c'est à dire qu'il existe une puissance de A dont tout les coefficients sont non nuls.

5. Montrer qu'il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geq L$ et tout couple $x, y \in \{1, \ldots, N\}$, il existe un mot admissible de longueur l dont la première lettre est x et la dernière est y.
6. Montrer que le nombre de points périodiques d'ordre n pour σ_A est équivalent à λ^n pour une certaine constante positive λ (nécéssite le théorème de Perron-Frobenius prouvé dans l'exercice 2).
7. Montrer que l'ensemble des points périodiques de σ_A est dense dans Ω_A.
8. Montrer que σ_A est topologiquement mélangeant.

Exercice 2 *Le théorème de Perron-Frobenius*
Le but de cet exercice est de prouver le théorème suivant

Théorème 2.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients sont positifs ou nuls et tel qu'il existe $n \geq 1$ tel que les coefficients de A^n sont tous strictement positifs. Alors*

1. *A a un vecteur propre $\vec{x}_{max}$ dont les coefficients sont strictement positifs ;*
2. *$\vec{x}_{max}$ est unique à multiplication par un scalaire près ;*
3. *$\lambda_{max} > 0$ la valeur propre de $\vec{x}_{max}$ est la plus grande des valeurs propres de A en module ;*
4. *$\lambda_{max} > 0$ est une valeur propre simple de A.*

On note P l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^N$ dont les coordonnées sont positives et $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum x_i = 1\}$.

1. Montrer que $A \cdot P \subset P$ et que l'application $T : \sigma \longrightarrow \sigma$ induite par A sur σ en renormalisant est continue.
2. Montrer que $T^n(\sigma) \subset \mathrm{Int}(\sigma)$.
3. Soit $\sigma_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n(\sigma)$. Montrer que σ est convexe.

Si C est un convexe d'un espace vectoriel normé, un point de C est dit *extrémal* si il ne peut être écrit comme une combinaison linéaire convexe stricte de deux points de C.

4. Montrer que σ_∞ a au plus N points extrémaux.
5. Montrer que les points extrémaux sont simultanément des vecteurs propres d'une certaine puissance de A.

On veut montrer qu'en fait σ_∞ est réduit à un point. Supposons qu'au contraire σ_∞ a au moins deux points extrémaux e et f dont les valeurs propres associées à une puissance de A sont λ et μ.

6. On suppose que $\lambda = \mu$. En considérant une combinaison linéaire de e et f judicieusement choisie, montrer que T a un point fixe dans $\partial\sigma$. Conclure dans ce cas.
7. On suppose alors que $\lambda = \mu$. En considérant l'action de A sur le plan engendré par e et f montrer qu'il existe $\vec{x} \in P$ tel qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m\vec{x} \notin P$ et conclure.
8. En déduire que σ_∞ est réduit à un unique point $\vec{x}_{max}$ qui est un vecteur propre de A. On notera λ_{max} sa valeur propre.

On montre maintenant que λ_{max} est plus grand que le module $|\mu|$ de n'importe quelle autre valeur propre de A.

9. Si $\mu \in \mathbb{R}$ et u est un vecteur propre associé à μ, montrer en considérant les itérés de $\vec{x}_{max} + \epsilon\mu$ pour un ϵ bien choisi que $|\mu| < \lambda_{max}$.
10. Si $\mu \in \mathbb{C}$, montrer qu'il existe un 2-plan sur lequel A agit comme la composé d'une rotation d'angle $\arg(\mu)$ et d'une dilatation de facteur $|\mu|$.
11. En déduire que $|\mu| < \lambda_{max}$.

On montre enfin que la valeur propre λ_{max} est simple. On suppose au contraire qu'elle ne l'est pas.

12. Montrer dans ce cas qu'il existe $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$ dont au moins une coordonnée est négative tel que $A \cdot y = \lambda_{max}(y + \vec{x}_{max})$.
13. Conclure.

Exercice 3 *Nombre de rotation*
Soit $f : S^1 \longrightarrow S^1$ un homéomorphisme.

1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels tels que $\forall n, m\ a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Montrer que la suite $(\frac{a_n}{n})$ admet une limite.

2. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que si $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne la projection naturelle

$$f \circ p = p \circ \tilde{f}$$

et que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout x.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $\frac{\tilde{f}^n(x)}{n}$ existe et ne dépend pas du choix de x. On la note $r(\tilde{f})$.
4. Montrer que la valeur de $r(\tilde{f})$ modulo $\mathbb{Z}$ ne dépend pas du choix de relevé f. On appelle donc ce résidu $r(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le *nombre de rotation* de f.
5. Montrer que $r(f)$ est rationnel si et seulement si f a une orbite périodique.