# Feuille n$^{\text{o}}$6

**Exercice 1** *Famille quadratique.*
On s'intéresse dans cet exercice à la dynamique de la famille de fonctions

$$f_\mu : x \longmapsto \mu(1-x)x$$

où $\mu > 1$. On fera la confusion $f = f_\mu$.

1. Montrer que si $x \notin [0,1]$ alors $f^n(x) \to -\infty$ quand $n \to +\infty$.
2. Décrire la dynamique de $f_\mu$ pour $1 < \mu < 3$.

On suppose désormais que $\mu > 4$. Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n = \{x \in [0,1] \mid f^n(x) \notin [0,1]\}$.

3. Montrer que les $A_n$ sont deux à deux disjoints et que $A_n$ est une union de $2^n$ intervalles ouvert.

On notera $I_0$ et $I_1$ les deux composantes connexes de $[0,1] \setminus A_1$. On suppose désormais que $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

4. Montrer que $\Lambda = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ est un ensemble de Cantor. [1]
5. Montrer que $f$ restreinte à $\Lambda$ est surjective.
6. Montrer que l'ensemble non-errant de $f$ est exactement égal à $\Lambda$.

On note $\Sigma_2$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\{0,1\}$.

7. Montrer que $f$ restreint à $\Lambda$ est topologiquement conjugué à l'action du décalage sur $\Sigma_2$.

**Exercice 2** *Le théorème de Perron-Frobenius*
Le but de cet exercice est de prouver le théorème suivant

**Théorème 2.1.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients sont positifs ou nuls et tel qu'il existe $n \geq 1$ tel que les coefficients de $A^n$ sont tous strictement positifs. Alors*

1. *$A$ a un vecteur propre $\vec{x}_{max}$ dont les coefficients sont strictement positifs ;*
2. *$\vec{x}_{max}$ est unique à multiplication par un scalaire près ;*
3. *$\lambda_{max} > 0$ la valeur propre de $\vec{x}_{max}$ est la plus grande des valeurs propres de $A$ en module ;*
4. *$\lambda_{max} > 0$ est une valeur propre simple de $A$.*

On note $P$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^N$ dont les coordonnées sont positives et $\sigma = \{x \in P \mid \sum x_i = 1\}$.

1. On pourra utiliser le fait que $f'(x) > 1$ pour $x \in I_0 \cup I_1$.

1. Montrer que $A \cdot P \subset P$ et que l'application $T : \sigma \longrightarrow \sigma$ induite par $A$ sur $\sigma$ en renormalisant est continue.
2. Montrer que $T^n(\sigma) \subset \mathrm{Int}(\sigma)$.
3. Soit $\sigma_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(\sigma)$. Montrer que $\sigma$ est convexe.

Si $C$ est un convexe d'un espace vectoriel normé, un point de $C$ est dit *extrémal* si il ne peut être écrit comme une combinaison linéaire convexe stricte de deux points de $C$.

4. Montrer que $\sigma_\infty$ a au plus $N$ points extrémaux.
5. Montrer que les points extrémaux sont simultanément des vecteurs propres d'une certaine puissance de $A$.

On veut montrer qu'en fait $\sigma_\infty$ est réduit à un point. Supposons qu'au contraire $\sigma_\infty$ a au moins deux points extrémaux $e$ et $f$ dont les valeurs propres associées à une puissance de $A$ sont $\lambda$ et $\mu$.

6. On suppose que $\lambda = \mu$. En considérant une combinaison linéaire de $e$ et $f$ judicieusement choisie, montrer que $T$ a un point fixe dans $\partial\sigma$. Conclure dans ce cas.
7. On suppose alors que $\lambda \neq \mu$. En considérant l'action de $A$ sur le plan engendré par $e$ et $f$ montrer qu'il existe $\vec{x} \in P$ tel qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m\vec{x} \notin P$ et conclure.
8. En déduire que $\sigma_\infty$ est réduit à un unique point $\vec{x}_{max}$ qui est un vecteur propre de $A$. On notera $\lambda_{max}$ sa valeur propre.

On montre maintenant que $\lambda_{max}$ est plus grand que le module $|\mu|$ de n'importe quelle autre valeur propre de $A$.

9. Si $\mu \in \mathbb{R}$ et $u$ est un vecteur propre associé à $\mu$, montrer en considérant les itérés de $\vec{x}_{max} + \epsilon\mu$ pour un $\epsilon$ bien choisi que $|\mu| < \lambda_{max}$.
10. Si $\mu \in \mathbb{C}$, montrer qu'il existe un 2-plan sur lequel $A$ agit comme la composé d'une rotation d'angle $\arg(\mu)$ et d'une dilatation de facteur $|\mu|$.
11. En déduire que $|\mu| < \lambda_{max}$.

On montre enfin que la valeur propre $\lambda_{max}$ est simple. On suppose au contraire qu'elle ne l'est pas.

12. Montrer dans ce cas qu'il existe $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$ dont au moins une coordonnée est négative tel que $A \cdot y = \lambda_{max}(y + \vec{x}_{max})$.
13. Conclure.

**Exercice 3** *Points presque périodiques.*
On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est *relativement dense* si il existe $k > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{n, n+1, \ldots, n+k\} \cap A \neq \emptyset$. Soit $f : X \longrightarrow X$ une transformation continue d'un espace topologique $X$. On dit que $x \in X$ est *presque périodique* si pour tout voisinage $U$ de $x$, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) \in U\}$ est relativement dense.
Montrer que si $X$ est un espace métrique compact, $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ est minimal pour $f$ si et seulement si $x$ est presque périodique.