École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n^{o}7

Exercice 1 *Entropie des systèmes dynamiques expansifs.*
Soit X un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow X$ une fonction continue. On dit que f est *expansive* si il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \; d(f^n(x), f^n(y)) < \delta \;\Rightarrow x = y.$$

On veut montrer que si f est expansive, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$h(f) = \lim_{m\to\infty} \frac{\log D(m,\alpha)}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\log S(m,\alpha)}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\log C(m,\alpha)}{m}$$

où C, D et S sont comme dans le cours.

1. On fixe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \delta$. Montrer que pour tout $\epsilon < \alpha$, il existe $m = m(\epsilon, \alpha) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple (x, y) tel que $d(x, y) \geq \epsilon$, il existe $i \leq m$ tel que $d(f^i(x), f^i(y)) > \alpha$.
2. Conclure.

Exercice 2 *Entropie des chaînes de Markov topologiques.*
Dans cet exercice, $A \in \mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients sont dans $\{0, 1\}$. On note Ω_N l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ et $\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N \mid \forall i \in \mathbb{Z},\ A_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1\}$. Une *chaine de Markov topologique* est l'action du décalage σ_A sur Ω_A.

1. Montrer que σ_A est expansive.
2. Montrer que l'entropie de σ_A est égale à $\log \rho(A)$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A (on pourra utiliser la définition de l'entropie via S).

Exercice 3 *Entropie d'une application lisse.*
Soit X une variété lisse compacte et $f : X \longrightarrow X$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'entropie de f est finie.[1]

Exercice 4 *Entropie des échanges d'intervalles.*
Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs tels que $\sum \alpha_i = 1$. On note $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum_{j\leq i} \alpha_i$ et $I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i[$. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On note

$$\alpha^\tau = (\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, \alpha_{\tau^{-1}(n)})$$

et β^τ associé de la même manière à α^τ.
On appelle échange d'intervalle associé à (α, τ) l'application continue par morceau de $[0, 1[$ définie sur I_i par $x \mapsto x - \beta_{i-1} + \beta^\tau_{\tau(i)-1}$. Un échange d'intervalle n'est pas continu, on a pourtant bien envie de parler de son entropie.

1. La clé est de montrer que f est lipschitzienne pour une certaine distance définissant la topologie de X.

1. Quelle est la "bonne" définition d'entropie pour un échange d'intervalle ?
2. Calculer l'entropie d'un échange d'intervalle.

Exercice 5 *Divers.*

1. Soit $f : X \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y$ deux applications de deux espaces métriques compacts X et Y. On suppose que f est semi-conjuguée à g. Montrer qu'alors l'entropie de f est plus grande que celle de g.
2. Soit $f : X \longrightarrow X$ une application continue de X un espace métrique compact dans lui-même. Montrer que si f est une isométrie, alors son entropie est nulle.

Exercice 6 *Entropie du solénoïde.*
On rappelle que le solénoïde S est le compact asympotiquement stable de l'application $F : S^1 \times D^2 \longrightarrow S^1 \times D^2$ définie par :

$$F(\varphi, x, y) = (2\varphi, \lambda x + \frac{1}{2}\cos 2\pi\varphi, \lambda y + \frac{1}{2}\sin 2\pi\varphi).$$

On rappelle (cf. Feuille n°4) que la restriction de F à S est bijective. Calculer l'entropie de $F_{|S}$. On pourra utiliser l'exercice précédent pour la semi-conjugaison appropriée.