École Normale Supérieure
Automne 2016 Systèmes dynamiques

Feuille n^{o}8

Exercice 1 *Le fer à cheval de Smale.*
Soit $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle. On considère un difféomorphisme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que l'intersection $f(R) \cap R$ consiste en deux rectangles "verticaux" R_0 et R_1, tels que la restriction de f aux composantes connexes de $f^{-1}(R)$ soit hyperbolique au sens où elle contracte uniformément la direction horizontale et dilate uniformément la direction verticale . On se referera au dessin si dessous :

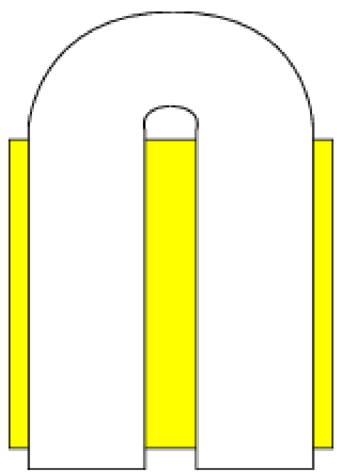

FIGURE 1 – L'image de R par f superposée avec R.

1. Montrer que
$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(R)$$
est le plus grand ensemble invariant par f.
2. Montrer que Λ est le produit de deux ensembles de Cantor.

On note Σ_2 l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

3. Montrer que l'application h qui à $\omega \in \Sigma_2$ associe $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(R_{\omega_i})$ est bien définie.
4. Montrer h est un homéomorphisme.
5. En déduire que f est topologiquement mélangeante.
6. Montrer que $\Lambda \subset \text{int}(R)$.

Exercice 2 *Codage d'un automorphisme hyperbolique*
On considère f l'application induite par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

1. Montrer qu'il existe deux rectangles plongés A et $B \subset \mathbb{T}$ dont les cotés sont des segments des appartenant aux droites propres de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tel que $A \cup B = \mathbb{T}$ et $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \emptyset$. [1]
2. Montrer que les composantes connexes des intersections des intérieurs de A et B avec $f(A)$ et $f(B)$ consistent en 5 rectangles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ et Δ_5.

On note Σ_5 l'ensemble des suite indexées sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Montrer que pour une suite $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_5$,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\Delta_{\omega_i})$$

est soit un singleton, soit l'ensemble vide.

4. Montrer que $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\Delta_{\omega_i})$ est non-vide si ω est une suite admissible pour une certaine chaine de Markov de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soit $\Omega_A \subset$ l'ensemble des suites admissibles pour A. Montrer que l'application $\varphi : \Omega_A \longrightarrow \mathbb{T}$ qui à ω associe l'unique point de $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\Delta_{\omega_i})$ est continue et semi-conjugue f et le décalage sur Ω_A.
6. Caractériser le défaut d'injectivité de φ. En déduire que f est topologiquement mélangeant.

1. Pour résoudre cette question, le mieux est encore de faire un dessin : on dessine le tore avec un modèle carré, et on trace deux segments de droites partant de coins bien choisis du carré dans les directions propres.