

---

# VARIÉTÉS DE GROMOV-THURSTON

*par*

Selim Ghazouani

---

Sous la direction de Bertrand Deroin  
Université d'Orsay

## Table des matières

1. Courbure négative et géométrie hyperbolique .....	2
2. Les dimensions 2 et 3 .....	5
3. Le théorème de rigidité de Mostow .....	6
4. Théorème de Borel et variétés hyperboliques .....	17
5. Construction de métriques à courbure négative .....	20
6. Première famille de contre-exemple .....	22
7. Deuxième construction de contre-exemples .....	28
Références .....	31

La géométrie hyperbolique joue un rôle plus qu'important dans le développement de la géométrie moderne. Elle est apparue historiquement comme une géométrie alternative à la géométrie euclidienne en dimension 2. Les mathématiciens, cherchant à prouver ou à infirmer l'indépendance du cinquième postulat d'Euclide par rapport aux quatre premiers, ont découvert les géométries sphérique et hyperbolique. Formellement, une géométrie est la donnée d'une variété riemannienne simplement connexe, complète homogène et isotrope.

**Theorème 0.1.** — *Il n'existe que trois géométries en dimension 2 : les géométries sphérique, euclidienne et hyperbolique.*

Un lien très fort existe entre la topologie et la géométrie pour les surfaces : toute surface compacte et orientable peut être munie d'une structure sphérique, euclidienne ou hyperbolique. En un certain sens, le cas hyperbolique est le cas général car seuls la sphère (qui peut être munie d'une structure sphérique) et le tore (qui peut être muni d'une structure plate) ne portent pas de structure hyperbolique. La géométrie hyperbolique est donc le modèle central dans l'étude de la géométrie des surfaces (voir [4]).

L'espace hyperbolique de dimension  $n$  noté  $\mathbb{H}^n$ , qui généralise le plan hyperbolique à toute les dimensions, peut être vu d'un certain nombre de façons, chacune mettant l'accent sur un des liens que peut avoir la géométrie hyperbolique avec un autre domaine, comme la géométrie

riemannienne, la géométrie projective, la topologie algébrique et la classification des variétés, la géométrie conforme de la sphère  $S^n$ , etc.

Une variété hyperbolique (ou qui porte une structure hyperbolique) est une variété qui est le quotient de  $\mathbb{H}^n$  par sous-groupe discret et sans torsion de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ , ou de manière équivalente, est une variété à courbure sectionnelle constante  $-1$ . On a remarqué que beaucoup de propriétés topologiques et géométriques des variétés hyperboliques pouvaient être étendues au cas où la courbure sectionnelle est seulement négative. Par exemple, toute variété à courbure négative est revêtue par  $\mathbb{R}^n$ , les triangles y sont fin, il n'y a qu'une géodésique par classe d'homotopie libre, etc.

**Question.** — Existe-t-il des variétés compactes orientables admettant des métriques à courbure sectionnelle strictement négative, qui ne portent pas de structure hyperbolique ?

La question n'est pas très dure à résoudre en dimension 2. Admettons qu'une surface compacte orientable  $S_g$  porte une métrique à courbure sectionnelle partout strictement négative. À un facteur multiplicatif (positif) près la courbure sectionnelle est égale à la courbure de Gauss de la surface. La formule de Gauss-Bonnet nous dit donc que nécessairement  $g \geq 2$ . Mais réciproquement, toute surface de genre supérieur à 2 porte une métrique hyperbolique. Il n'est pas très dur de construire explicitement un domaine fondamental d'une telle structure dans  $\mathbb{H}^2$  (voir [4]). On sait même que l'espace de module de ces structures peut être paramétré par  $6g - 6$  paramètres réels. On a donc en plus beaucoup de telles structures.

La situation est plus complexe en dimension 3. On ne peut pas, comme on l'a fait en dimension 2, donner une liste explicite des variétés susceptibles de porter une métrique à courbure négative, et puis construire pour chacune une structure hyperbolique "à la main". Cela serait d'autant plus dur que le théorème de Mostow nous assure que si une structure hyperbolique existe, elle est unique. On va voir qu'il se passe quand même la même chose qu'en dimension 2, mais que cette fois une preuve est très chère, car elle moyenne la conjecture de géométrisation de Thurston.

Les dimensions supérieures à 4 ne possèdent pas la même rigidité que les dimensions 2 et 3. Historiquement les premiers contre-exemples proviennent de sous-variétés de l'espace hyperbolique complexe (voir []).

Gromov et Thurston ont mis en évidence dans [8] de remarquables exemples de variétés compactes, orientables portant des métriques à courbure sectionnelle strictement négative et qui ne portent pas de structures hyperboliques. La méthode consiste à construire des revêtements ramifiés de variétés hyperboliques d'ordre fini le long de sous-variétés de codimension 2 totalement géodésiques et d'appliquer l'heuristique qu'un revêtement ramifié est toujours "plus négativement courbé" que la variété de base. La difficulté est ensuite de montrer que les variétés ainsi construites n'ont pas de métrique à courbure constante, ce qui peut-être fait en utilisant le théorème de rigidité de Mostow.

Je tiens à remercier particulièrement Jean-Marc Schlenker pour l'aide qu'il m'a apporté pour mener à bien les calculs de géométrie riemannienne et Pierre Pansu de m'avoir suggéré l'utilisation du théorème de Eels-Sampson pour me débloquer dans la construction des premiers contre-exemples. Surtout, je remercie Bertrand Deroin de m'avoir proposé ce très beau sujet de recherche et d'avoir été d'une grande disponibilité pendant les quelques mois où il a encadré mon stage.

## 1. Courbure négative et géométrie hyperbolique

**1.1. Géométrie riemannienne, courbure, et courbure négative.** — La courbure en géométrie riemannienne est une notion qui apparait sous des formes très variées. En effet c'est une quantité que l'on considère très naturellement lorsqu'on étudie les courbes planes. On peut prouver que toute courbe plane de classe  $\mathcal{C}^2$  est, en chaque point, localement approximée à l'ordre 2 par un cercle. On définit la courbure en un point comme l'inverse du rayon de ce cercle de telle sorte que la courbure soit grande quand la courbe "tourne" vite. La fonction de courbure encode alors une information très intuitive, qui n'est d'ailleurs pas un invariant riemannien de la courbe (car les variétés riemannienne de dimension 1 sont toutes localement isométriques).

Intéressons nous maintenant à  $(S, h)$  une surface riemannienne, qu'on imagine plongée isométriquement dans  $\mathbb{R}^3$ . En chaque point il est possible de définir une application de courbure qui ne dépend pas de la manière dont  $S$  est plongée, bien que la définition soit a priori extrinsèque : soit  $x \in S$  fixons une direction dans  $T_x S \subset \mathbb{R}^3$ , et considérons la famille des plans orthogonaux à  $T_x S$  passant par  $x$ . Cette famille peut être indexée par l'angle  $\theta$  que fait le plan avec la direction fixée à la base dans  $T_x S$ . Notons alors  $P_\theta$  cette famille de plans. L'intersection de  $P_\theta$  avec  $S$  est, d'après le théorème du rang, une courbe de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage du point  $x$ . On peut alors associer à l'angle  $\theta$  la valeur de la courbure de cette courbe  $\kappa(\theta)$ . On a alors, en choisissant judicieusement la direction initiale  $\theta = 0$ , le joli théorème suivant :

**Theorème 1.1 (Euler).** — Soit  $\kappa^+$  et  $\kappa^-$  le maximum et le minimum de la fonction  $\kappa$ . Alors

$$\kappa(\theta) = \kappa^+ \cos(\theta)^2 + \kappa^- \sin(\theta)^2$$

Le résultat encore plus remarquable, dû à Gauss ( voir [7] ), est que le produit  $\kappa^+ \kappa^-$  est un invariant géométrique de la surface (ne dépend pas de la manière dont elle est plongée). C'est la courbure de Gauss, qui coïncide à un facteur  $\frac{1}{2}$  près avec la courbure sectionnelle du plan tangent de  $S$ .

**Definition 1.2.** — Une variété riemannienne est la donnée d'une variété différentiable  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et d'un tenseur métrique  $g$  qui à chaque point  $x$  de  $M$  associe un produit scalaire de  $T_x M$ . On demande de plus que  $g$  soit une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .  $g$  est appelé **métrique riemannienne**.

Il existe pour toute métrique  $g$  une unique connexion  $\nabla$  sans torsion et compatible avec la métrique  $g$  au sens où pour tous champs de vecteurs  $X, Y$  et  $Z$  définis au voisinage d'un point,

$$Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Pour une fonction régulière donnée  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta_{[X, Y]} f = \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f$ . C'est un énoncé équivalent au lemme de Schwarz dans le cas où la variété est  $\mathbb{R}^n$  euclidien. On peut se demander si une telle égalité est vraie pour les champs de vecteurs puisque elle est vraie dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ . Ce n'est pas le cas : la quantité  $R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$  mesure ce défaut de commutativité et est en plus un invariant géométrique de la variété. On préférera d'ailleurs travailler avec  $\mathcal{R}(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y, Z), T)$ .

Ce tenseur de courbure  $\mathcal{R}$  (aussi appelé tenseur de Riemann) est un tenseur de type  $(4, 0)$  qui possède un certain nombre de symétries et d'antisymétries), et la courbure sectionnelle  $K(P)$  d'un 2-plan  $P \subset T_x M$  est le réel  $\mathcal{R}(u, v, u, v)$ , pour toute base orthonormée  $(u, v)$  de  $P$ . On pourra consulter [6] pour plus de précision sur le tenseur de courbure.

**Definition 1.3.** — On dit qu'une variété riemannienne  $(M, g)$  est

- à courbure sectionnelle négative si pour tout 2-plan  $P$  de  $TM$ ,  $K(P) \leq 0$ .
- à courbure sectionnelle strictement négative si pour tout 2-plan  $P$  de  $TM$ ,  $K(P) < 0$ .
- hyperbolique si pour tout 2-plan  $P$  de  $TM$ ,  $K(P) = -1$ .

Quelques remarques sur ces définitions : tout d'abord, le fait d'être à courbure (strictement) négative ou hyperbolique est une propriété géométrique, qui ne dépend que de la métrique riemannienne sur la variété, même si nous verrons plus tard que n'importe quelle variété ne peut pas être munie d'une métrique riemannienne à courbure négative et qu'il existe des obstructions topologiques à l'existence d'une telle métrique. Dans le cas d'une surface plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , être à courbure strictement négative en un point signifie avoir localement une forme de selle de cheval. Il s'ensuit qu'une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  ne peut être à courbure sectionnelle négative, ce qui peut se voir en considérant un point de norme maximale par exemple. Par contre une image locale d'une surface à courbure négative, et même hyperbolique est donnée par la pseudo-sphère. Nous n'avons pas encore justifié la terminologie hyperbolique, cela viendra dans les paragraphes suivants.

Une première obstruction topologique à l'existence d'une métrique à courbure négative sur une variété  $M$  est donnée par le théorème suivant :

**Theorème 1.4 (Cartan-Hadamard).** — Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle négative. Alors pour tout  $x \in M$

$$\exp_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

est un revêtement. En particulier, comme  $\mathbb{R}^n$  est simplement connexe, c'est le revêtement universel de  $M$ .

Ainsi une variété qui porte une métrique riemannienne à courbure négative est revêtue par  $\mathbb{R}^n$ . Cela implique en particulier qu'une somme connexe de variétés non triviales ne peut être hyperbolique en dimension supérieure ou égale à 3.

## 1.2. Géométrie hyperbolique. —

**Définition 1.5.** — L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  est l'unique variété de dimension  $n$  simplement connexe à courbure sectionnelle  $-1$ .

L'existence d'une telle variété va être établie dans le paragraphe suivant, mais l'unicité découle du théorème de Cartan-Hadamard. En particulier,  $\mathbb{H}^n$  est homéomorphe à une boule ouverte.

Il existe plusieurs manières de définir  $\mathbb{H}^n$ . On présentera ici celle qui justifie la terminologie *hyperbolique*. Considérons  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la forme quadratique lorentzienne canonique  $q(x) = \sum_{i \leq n} x_i^2 - x_{n+1}^2$ . L'ensemble  $H = \{x \mid q(x) = -1\}$  est un **hyperboloïde** à deux nappes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La forme quadratique  $q$  se restreint à  $TH$  en une métrique riemannienne.

**Proposition 1.6.** —  $H$  est à courbure sectionnelle constante  $-1$ .

Comme  $H$  a deux composantes connexes qui sont isométriques et simplement connexes, on définit  $\mathbb{H}^n$  comme étant une de ces deux composantes connexes. Le fait important est que  $\mathbb{H}^n$  est le modèle de toute les variétés à courbure sectionnelle  $-1$  car le fait d'être à courbure sectionnelle constante caractérise complètement la métrique :

**Proposition 1.7.** — *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante  $-1$ . Soit  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  son revêtement universel. Alors  $(\mathbb{R}^n, p^*g)$  est isométrique à l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ . En particulier il existe  $\Gamma \subset \text{Iso}(\mathbb{H}^n)$  un sous groupe isomorphe à  $\pi_1(M)$  agissant proprement et librement tel que  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$*

Cette proposition est assez facile à démontrer (on en trouvera une preuve dans [6] par exemple), mais est assez importante. Elle nous dit que les variétés hyperboliques (définies par une condition analytique sur la métrique) peuvent être pensées algébriquement comme des sous-groupes discrets sans torsion de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n) \simeq \text{SO}(n, 1)$ .

## 2. Les dimensions 2 et 3

On s'intéresse d'abord à la dimension 2. Quelles sont les surfaces compactes orientables qui portent une structure hyperbolique ? Quelles sont celles qui portent une métrique à courbure négative ? Rappelons le très classique résultat de théorie des surfaces :

**Théorème 2.1.** — *Soit  $S$  une surface compacte. Elle est alors homéomorphe au tore à  $g$  trous, où  $g$  est le genre de  $S$*

Nous allons rapidement voir que pour les surfaces, il n'y a pas de différence entre porter une métrique à courbure négative et porter une structure hyperbolique. Ce qui rend la preuve assez simple est le fait qu'on puisse vérifier le résultat surface par surface.

**Proposition 2.2.** — *Soit  $S$  une surface compacte de genre  $g$ . Si  $h$  est une métrique à courbure sectionnelle strictement négative partout alors  $g \geq 2$*

Rappelons la formule de Gauss-Bonnet : si  $S$  est une surface compacte orientable de genre  $g$ , et  $h$  une métrique riemannienne de classe  $\mathcal{C}^\infty$  quelconque, alors

$$\int_S K_g d\mu_h = 4\pi(1 - g)$$

où  $d\mu_h$  représente la forme volume associée à la métrique  $h$ . En particulier si on suppose que  $K_g < 0$  alors  $g > 1$  nécessairement.

Passons à la dimension 3. On cite un très joli théorème, qui est un corollaire de la conjecture de géométrisation :

**Théorème 2.3.** — *Soit  $M$  une variété compacte orientable irréductible dont le groupe fondamental est infini et ne contient pas de copie de  $\mathbb{Z}^2$ . Alors  $M$  porte une structure hyperbolique.*

Cela ne résoud pas complètement le problème de l'existence de variétés hyperboliques en dimension 3, mais cela ramène la question à un problème de topologie relativement simple. Il existe aussi des constructions explicites via recollement de polyèdres hyperboliques. Ces constructions ont été données par Poincaré, et on pourra les retrouver en détail dans [16].

Prenons maintenant une variété hyperbolique complète avec un nombre fini de cusps. Un cusp d'une variété hyperbolique complète de dimension 3 est toujours de la forme  $\mathbb{R} \times T^2$ . Un remplissage de Dehn est l'opération qui consiste à coller un tore solide le long de chacun des cusps via un difféomorphisme  $f$  de  $T^2$ . Deux telles opérations produisent des variétés difféomorphes si les difféomorphismes du tore choisis induisent le même isomorphisme sur le groupe fondamental du tore. On identifie alors deux telles opérations.

**Theorème 2.4 (Thurston).** — *Soit  $M$  une variété hyperbolique complète de volume fini avec un nombre fini de cusps. À l'exception d'un nombre fini de cas, les variétés obtenues par remplissage de Dehn portent une métrique hyperbolique. De plus, le volume de ces variétés tendent vers le volume de  $M$ .*

Ces théorèmes sont des théorèmes très difficiles, mais ils produisent une quantité abondante de variétés hyperboliques compactes.

Par contre, prenons une variété  $V$  à courbure sectionnelle strictement négative. D'après un théorème de Milnor, cette variété se décompose de manière unique en somme connexe de variétés premières. Mais comme  $V$  est revêtue par  $\mathbb{R}^3$ , toute sphère plongée borde une boule et la décomposition de  $V$  ne comporte qu'un facteur. Ce facteur ne contient pas de tore immergé (par argument de théorie géométrique des groupes, le groupe fondamental d'une variété à courbure strictement négative ne contient pas de  $\mathbb{Z}^2$ ). Elle porte donc une des huit géométries de Thurston. Elle ne peut pas être sphérique car elle est revêtue par  $\mathbb{R}^n$ . Donc son groupe fondamental est infini. Le théorème précédent implique qu'elle est hyperbolique.

### 3. Le théorème de rigidité de Mostow

Les structures hyperboliques présentent une forme de rigidité très forte à partir de la dimension 3. Le théorème suivant, prouvé par Mostow dans le cas des variétés compactes (voir [14]) affirme que deux variétés hyperboliques compactes ayant le même groupe fondamental sont nécessairement isométriques. Les hypothèses du théorème peuvent être allégées, il suffit de supposer les variétés complètes et de volume fini.

**Theorème 3.1 (Théorème de rigidité de Mostow).** — *— Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés hyperboliques compactes orientables de dimension  $n \geq 3$  et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une équivalence d'homotopie. Alors  $f$  est isotope à une isométrie.*  
*— Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés hyperboliques compactes et orientables de dimension  $n \geq 3$  et  $\varphi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$  un isomorphisme de groupe. Alors il existe une isométrie  $f : M_1 \rightarrow M_2$  telle que le morphisme  $f_*$  induit entre les groupes fondamentaux est égal à  $\varphi$ .*  
*— Soit  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux sous groupes discrets et cocompacts de  $SO(n, 1)$  isomorphes. Alors ils sont conjugués dans  $SO(n, 1)$ .*

On a donné ici trois énoncés équivalents du théorème, on démontrera le premier. On peut passer sans trop de difficultés aux autres énoncés en se rappelant qu'une variété hyperbolique est un  $K(\pi, 1)$  ce qui entraîne que tout isomorphisme entre groupe fondamentaux est réalisé par une fonction continue.

**Proposition 3.2.** — *Soit  $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$  une variété hyperbolique complète et  $x_0 \in \mathbb{H}^n$ . Alors*

(1) *L'ensemble  $D = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, x_0) \leq d(x, \gamma(x_0)) \forall \gamma \in \Gamma\}$  est un domaine fondamental de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^n$ .*

(2)  *$\text{vol}(D) = \text{vol}(M)$ .*

(3) *Si  $M$  est compacte,  $D$  est un polyèdre géodésique.*

**Definition 3.3.** — *Soit  $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ . On dit que  $f$  est une quasi-isométrie si il existe des constantes  $c_1$  et  $c_2 > 0$  telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{H}^n \quad \frac{1}{c_1} \cdot d(x, y) - c_2 \leq d(f(x), f(y)) \leq c_1 \cdot d(x, y)$$

Soit  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une fonction continue entre deux variétés hyperboliques. Alors il existe une fonction  $\tilde{f}$  qui "relève"  $f$  au sens où le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

**Lemme 3.4.** — *Si  $f$  est une équivalence d'homotopie entre deux variétés compactes alors  $\tilde{f}$  est homotope à une quasi-isométrie.*

*Démonstration.* — D'après un résultat classique,  $f$  est homotope à une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Quitte à faire un abus de notation on supposera donc  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . En appelant  $g : M_2 \rightarrow M_1$  la fonction qui réalise l'équivalence d'homotopie avec  $f$ , et en s'appuyant sur la remarque précédente on peut aussi supposer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Maintenant soit  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  deux applications relevant  $f$  et  $g$ .

Comme  $M_1$  et  $M_2$  sont compactes,  $\|Df\|_{hyp}$  et  $\|Dg\|_{hyp}$  sont uniformément bornées par une constante  $c_1$  ce qui vaut aussi pour  $\|D\tilde{f}\|_{hyp}$  et  $\|D\tilde{g}\|_{hyp}$ . Comme  $\mathbb{H}^n$  est une variété riemannienne complète on a donc

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{H}^n \quad d(\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2)) \leq c_1 \cdot d(x_1, x_2)$$

et

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{H}^n \quad d(\tilde{g}(x_1), \tilde{g}(x_2)) \leq c_1 \cdot d(x_1, x_2)$$

Pour la seconde inégalité :

$\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  vérifient

$$\forall \gamma \in \pi_1(M_1) \quad \tilde{f} \circ \gamma = f^*(\gamma) \circ \tilde{f}$$

$$\forall \gamma \in \pi_1(M_2) \quad \tilde{g} \circ \gamma = g^*(\gamma) \circ \tilde{g}$$

Cela implique que en particulier que  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  commute à tout élément de  $\Gamma = \pi_1(M_1)$ . En effet

$$\tilde{g} \circ \tilde{f} \circ \gamma = \tilde{g} \circ f^*(\gamma) \circ \tilde{f} = g^*(f^*(\gamma)) \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = \gamma \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}$$

car par définition  $g^* \circ f^* = Id$

Soit maintenant  $D$  un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  donné par la proposition précédente. Comme  $M_1$  est compacte,  $D$  est compact et donc  $\|\tilde{g} \circ \tilde{f} - Id\|_{hyp}$  est bornée sur  $D$  par une constante  $b$ , mais comme  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  commute à tout élément de  $\Gamma$  et que  $\Gamma(D) = \mathbb{H}^n$ ,  $\|\tilde{g} \circ \tilde{f} - Id\|_{hyp}$  est bornée par  $b$  sur tout  $\mathbb{H}^n$ . Maintenant soit  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{H}^n$  :

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, \tilde{g} \circ \tilde{f}(x_1)) + d(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x_1), \tilde{g} \circ \tilde{f}(x_2)) + d(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x_2), x_2)$$

il vient

$$d(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x_1), \tilde{g} \circ \tilde{f}(x_2)) \geq d(x_1, x_2) - 2b$$

puis

$$d(f(x_1), f(x_2)) \geq \frac{1}{c_1} \cdot d(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x_1), \tilde{g} \circ \tilde{f}(x_2)) \geq \frac{1}{c_1} d(x_1, x_2) - \frac{2b}{c_1}$$

□

**3.1. Extension des quasi-isométries au bord de  $\mathbb{H}^n$ .** — On prouve dans cette section que toute quasi-isométrie de  $\mathbb{H}^n$  s'étend de manière unique en une fonction continue de  $\overline{\mathbb{H}^n}$  dans  $\overline{\mathbb{H}^n}$  telle que sa restriction au bord induise une bijection sur ce même bord. De manière générale, ce lemme est vrai pour les variétés compacte à courbure sectionnelle strictement négative, et même pour une classe plus générale d'espaces métriques (les espaces  $\delta$ -hyperboliques). On trouvera une preuve de cette généralisation dans [3].

**Lemme 3.5.** — *Soit  $\gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^n$ . Tout chemin à distance  $s$  de  $\gamma$  est de longueur au moins  $\cosh s$  fois plus grande que la longueur de sa projection sur  $\gamma$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de paramétrer une géodésique dans le modèle de la quadrique. On constate alors que la différentielle de la projection, à distance  $s$ , augmente les distances de  $\cosh s$ . □

**Lemme 3.6.** — *Il existe  $t > 0$  tel que si  $\alpha$  est une géodésique de  $\mathbb{H}^n$  alors il existe une unique géodésique  $A(\beta)$  telle que  $P(\beta) \subset N_t(A(\beta))$ , où  $N_t(A)$  désigne le  $t$ -voisinage d'une partie  $A$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha$  une géodésique de  $\mathbb{H}^n$  et notons  $\beta = P(\alpha)$ . On choisit deux points  $a = P(x)$  et  $b = P(y)$  sur  $\beta$  et on note  $\gamma$  la géodésique allant de  $a$  à  $b$ .

Nous allons montrer dans un premier temps que pour tout  $s > 0$ , les composantes connexes de  $[x, y] \cap P^{-1}(N_s(\gamma))$  ont leur diamètre borné. Soit  $q_1 = P(p_1)$  et  $q_2 = P(p_2)$  tels que  $[p_1, p_2]$  est une composante connexe de  $[x, y] \cap P^{-1}(N_s([a, b]))$ . On a que  $d(q_1, \gamma) = d(q_2, \gamma) = s$ . Comme  $P$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et est une quasi-isométrie de rapport  $c_1$  clairement  $L(\beta_{|[q_1, q_2]}) \leq c_1 d(p_1, p_2)$ . Maintenant on écrit que  $P$  est une quasi-isométrie :

$$\frac{1}{c_1} \cdot (p_1, p_2) - c_2 \leq d(q_1, q_2) \leq c_1 \cdot d(p_1, p_2)$$

Or  $d(q_1, q_2) \leq L(\beta_{|[q_1, q_2]})$ . Mais d'après le lemme précédent  $L(\beta_{|[q_1, q_2]}) \leq 2s + \frac{L(\beta_{|[q_1, q_2]})}{\cosh(s)}$  donc en réinjectant on obtient :

$$\frac{1}{c_1} \cdot d(p_1, p_2) - c_2 \leq c_1^2 \frac{d(p_1, p_2)}{\cosh(s)} + 2sc_1$$

$$d(p_1, p_2) \leq \lambda$$

avec  $\lambda > 0$  pour  $s$  suffisamment grand, et  $\lambda$  ne dépend que de  $s$ .

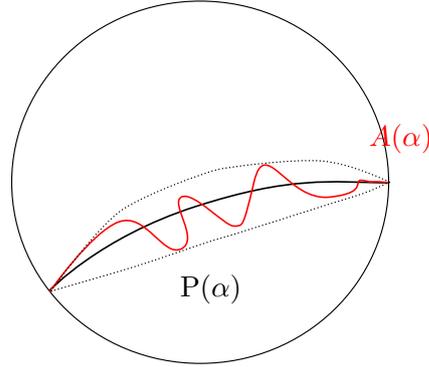
Maintenant soit  $z \in [x, y]$

$$d(P(z), \gamma) \leq d(P(z), P(x)) + d(P(x), \gamma)$$

ainsi

$$d(P(z), \gamma) \leq c_1 \lambda + s$$

On pose alors  $t = c_1 \lambda + s_0 + 1$  pour un  $s_0$  convenable. Comme  $P$  est propre, pour n'importe quelle suite  $(x_n)$  de  $\alpha$  qui tend vers une extrémité  $P(x_n)$  tend vers l'infini.  $(x_n)$  converge dans  $\overline{\mathbb{H}^n}$ . En effet si cela n'était pas le cas on aurait deux valeurs d'adhérence  $y^1$  et  $y^2$  telle que  $P(x_n^1)$

FIGURE 1. Géodésique asymptotique à l'image d'une géodésique par  $P$ 

et  $P(x_n^2)$  convergent vers  $x^1$  et  $x_2$  respectivement. On peut alors trouver  $x_j^2 \in [x_j^1, x_k^1]$  tel que  $P(x_i^2) \notin N_t(\mu)$  où  $\mu$  désigne la géodésique joignant  $P(x_j^1)$  et  $P(x_k^1)$  ce qui est absurde.

À une géodésique est donc naturellement associée deux points de  $\partial\mathbb{H}^n$ . Ces deux points sont nécessairement distincts, par un raisonnement analogue au précédent. La géodésique  $A(\gamma)$  associée à ces deux points est le bon candidat pour rester à distance bornée de  $\gamma$ .

On considère deux suites  $x_n^1$  et  $x_n^2$  tendant vers les extrémités de  $\gamma$ , et  $K$  un compact quelconque de  $\mathbb{H}^n$ . Si on note  $\gamma_n$  la géodésique joignant  $P(x_n^1)$  à  $P(x_n^2)$  on va montrer que la distance de  $\gamma \cap K$  à  $\gamma_n \cap K$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Il suffit de remarquer que dans le modèle du disque de Poincaré, les géodésiques sont les arcs de cercles orthogonaux à  $S^{n-1}$ . Ainsi comme  $P(x_n^1)$  et  $P(x_n^2)$  tendent vers les extrémités de  $A(\gamma)$ , le résultat est vrai pour la distance euclidienne. Mais sur un compact, les distances euclidiennes et hyperboliques sont équivalentes, c'est donc aussi vrai pour la distance hyperbolique. Comme l'image de  $[x_n^1, x_n^2]$  par  $P$  reste à distance de  $t$  de  $\gamma_n$ , en passant à la limite, elle reste à distance  $t$  de  $\gamma$ .  $\square$

On a donc défini une application  $A$  qui à chaque géodésique associe de manière unique une autre géodésique. Ceci nous permet en voyant par exemple la sphère à l'infini comme les classes d'équivalence de géodésiques bornées, de définir  $\partial P : \partial\mathbb{H}^n \cup \mathbb{H}^n \longrightarrow \partial\mathbb{H}^n \cup \mathbb{H}^n$  qui prolonge  $P$ .

**Proposition 3.7.** — *La fonction  $\partial P$  est continue.*

On aura besoin du lemme suivant

**Lemme 3.8.** — *Soit  $\gamma$  une géodésique et  $H$  un hyperplan orthogonal à  $\gamma$ . On note  $\pi$  la projection sur  $A(\gamma)$ . Alors le diamètre de  $\pi(P(H))$  est borné par une constante  $c$  ne dépendant que de  $P$ .*

*Démonstration.* — Il faut ici faire un petit raisonnement géométrique : on appelle  $x$  le point d'intersection entre  $H$  et  $\gamma$ , et  $y$  un point quelconque de  $H$ . Soit  $\beta$  la demi-géodésique partant de  $x$  passant par  $y$ . On appelle  $l_1$  et  $l_2$  les géodésiques asymptotiquement parallèles à  $\beta$  et  $\gamma$ . On note aussi  $x_1$  et  $x_2$  les points de  $l_1$  et  $l_2$  réalisant la plus petite distance à  $x$ . Soit  $z$  le projeté sur  $A(\gamma)$  de  $x$ . Estimons  $d(z, A(l_i))$ , en remarquant que  $d(x, x_1) = d(x, x_2)$  est une certaine constante  $k$  ne dépendant d'aucune donnée du problème.

$$d(z, A(l_i)) \leq d(z, P(x)) + d(P(x), P(x_i)) + d(P(x_i), A(l_i))$$

$$d(z, A(l_i)) \leq 2t + c_1.k$$

Maintenant on peut habilement estimer

$$d(\pi(P(y)), z) \leq d(\pi(P(y)), \pi(A(\beta))) + d(\pi(A(\beta)), z)$$

Le premier terme est inférieur à  $d(P(y), A(\beta)) \leq t$  car la projection est 1-lipschitz par rapport à la distance hyperbolique et le second terme est inférieur à  $2t + c_1.k$  car au moins un des deux segments joignant  $z$  à  $A(l_i)$  doit croiser  $A(\beta)$ . En posant  $c = 3t + c_1.k$  on a gagné!

□

On peut alors prouver la proposition 3.7. La continuité au points intérieurs est évidente, car  $P$  est continue. Soit  $x$  un point du bord,  $\beta$  une géodésique quelconque terminant en  $x$ . Soit  $H$  un hyperplan orthogonal à  $A(\beta)$ . La composante connexe de  $\overline{\mathbb{H}^n} \setminus H$  contenant  $\partial P(x)$  est un voisinage de  $\partial P(x)$ , et la collection de tels ensembles forme une base de voisinage de  $\partial P(x)$ .

Soit  $y$  une suite de points de  $\beta$  tendant vers  $x$ , et  $U$  un des voisinages considérés précédemment avec  $H$  l'hyperplan correspondant. Il est entendu qu'on peut trouver un  $y_0$  tel que pour tout  $y$  appartenant à  $[y_0, x)$ , la boule de centre  $P(y)$  et de rayon  $c$  soit contenue dans l'ouvert  $U$ . Soit  $H'$  l'hyperplan orthogonal à  $\beta$  en  $y_0$  et  $V$  la composante connexe  $\overline{\mathbb{H}^n} \setminus H'$  contenant  $x$ .  $V$  est réunion des hyperplans orthogonaux à  $\beta$  passant par les points de  $[y_0, x)$ . En appliquant le lemme précédent on obtient que  $\partial P(V) \subset U$ , ce qui prouve la continuité de  $\partial P$ .

On a donc prouvé le théorème d'extension des quasi-isométries au bord.

### 3.2. Volume des simplexes idéaux. —

**Definition 3.9.** — *On appelle simplexe idéal tout simplexe de  $\overline{\mathbb{H}^n}$  dont les sommets sont sur  $\partial\mathbb{H}^n$  et dont les faces sont totalement géodésiques.*

Dans la suite on note  $\Delta$  un simplexe idéal quelconque, et  $v(\Delta)$  son volume hyperbolique. La fonction volume  $v$  atteint son maximum sur l'ensemble des simplexes idéaux. Ce résultat est difficile car l'ensemble des simplexes idéaux munis d'une topologie raisonnable n'est pas compact (il s'identifie naturellement à l'ensemble des  $n$ -uplets de points distincts de  $S^{n-1}$ ). On ne donne ici une démonstration que du cas  $n = 3$  car les calculs restent raisonnables. Pour une preuve dans le cas général, voir [9].

La méthode consiste à calculer explicitement le volume d'un tétraèdre hyperbolique  $\Delta$ . Pour cela on va travailler dans le modèle du demi-espace de Poincaré  $P^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$  muni de la métrique  $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$ , la forme volume associée étant  $\frac{dx dy dz}{z^3}$ .

**Definition 3.10.** — *Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux plans totalement géodésiques de  $\mathbb{H}^3$ . L'angle dièdre entre  $P_1$  et  $P_2$  est l'angle entre ces deux plans. Dans un tétraèdre totalement géodésique, on dira que l'angle dièdre d'une arête est l'angle entre les deux plans s'intersectant le long de cette arête.*

On peut se convaincre que l'angle dièdre est bien défini en prenant deux champs de vecteurs unitaire  $X_1, X_2$  orthogonaux à la géodésique d'intersection vivants respectivement dans  $P_1$  et  $P_2$ . Ils sont uniquement déterminés au choix de l'orientation près. Le calcul de  $d_{\gamma'(t)}g(X_1(\gamma(t)), (X_2(\gamma(t))))$  (où  $\gamma$  est une paramétrisation locale à vitesse constante de la géodésique d'intersection) via les connexions de Levi-Civita donne une preuve du résultat.

**Lemme 3.11.** — *Soit  $\Delta = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  un simplexe idéal et  $i \in 0, 1, 2, 3$ . On peut toujours supposer que  $s_i$  est  $\infty$ .*

C'est une simple conséquence du fait que  $Iso(\mathbb{H}^3)$  est transitif sur le bord. En particulier si on regarde dans le modèle du demi-espace, on peut supposer que  $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  et que les faces  $(\infty, s_i, s_j)$  sont contenues dans les plans euclidiens orthogonaux à  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  passant par  $s_i$  et  $s_j$ . En corollaire de cette remarque, on a

**Proposition 3.12.** — *La somme des angles dièdres des faces arrivant en un sommet donné est égale à  $\pi$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  les trois angles dièdres arrivant en  $s_0$ . On peut supposer que  $s_0 = \infty$ . Pour  $t$  suffisamment grand

- $\mathbb{R}^2 \times \{t\} \cap \Delta$  est un triangle euclidien
- $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  intersecte chaque face de  $\Delta$  orthogonalement

Ainsi les angles (euclidiens) de  $\mathbb{R}^2 \times \{t\} \cap \Delta$  sont  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  car la métrique hyperbolique est conforme à la métrique euclidienne de  $P^+$ . Ainsi

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

□

**Lemme 3.13.** — *Dans un tétraèdre idéal, les arêtes opposées ont même angle dièdre.*

*Démonstration.* — En écrivant  $\alpha$  et  $\alpha'$ ,  $\beta$  et  $\beta'$ ,  $\gamma$  et  $\gamma'$  les angles dièdres des arêtes opposé et en écrivant les 4 relations au sommets on trouve

- (1)  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- (2)  $\alpha' + \beta' + \gamma = \pi$
- (3)  $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$
- (4)  $\alpha' + \beta + \gamma' = \pi$

En faisant par exemple (1) – (2) + (3) – (4) on trouve  $\alpha = \alpha'$  et de même pour les autres par symétrie.

□

Maintenant il nous faut découper le simplexe  $\Delta = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  en partie dont on saura calculer le volume.

Dans le modèle du demi-espace, le plan géodésique engendré par  $s_1, s_2$  et  $s_3$  est la demi-sphère dont le cercle circonscrit à  $s_1, s_2$  et  $s_3$  est la frontière.

En particulier, la projection de  $s_0$  sur ce plan est le point au dessus du centre du cercle circonscrit à  $s_1, s_2$  et  $s_3$ .

La projection de  $\Delta$  sur le plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  est le triangle  $T$  de sommets  $s_1, s_2$  et  $s_3$ . Soit  $a_k$  le pied de la médiatrice à  $[s_i, s_j]$  pour tout triplet  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  et  $b$  le centre du cercle circonscrit à  $T$  qui est le point d'intersection des médiatrices sus-mentionnées.

On découpe  $\Delta$  en 6 simplexes géodésiques, tous de sommet  $s_0 = \infty$  et de base  $(b_i, a_j, b)_{i \neq j \in \{1, 2, 3\}}$ .

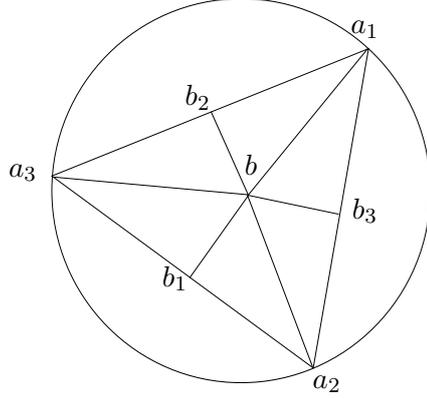


FIGURE 2. Découpage d'un tétraèdre

On va calculer le volume de ces simplexes. On notera désormais  $t_0 = s_0, t_1 = s_i, t_2 = b$  et  $t_3 = a_j$ ; et le simplexe  $(t_0, t_1, t_2, t_3) = \Delta'$ . Remarquons les propriétés suivantes :

- $\Delta'$  a deux sommets sur  $\partial\mathbb{H}^n$ ,  $t_0$  et  $t_1$ .
- $(t_0, t_1) \perp (t_1, t_2, t_3)$ .
- L'angle dièdre de  $(t_0, t_3)$  vaut  $\frac{\pi}{2}$ .
- Soit  $\alpha$  l'angle dièdre de  $(t_0, t_2)$ . L'angle dièdre de  $(t_0, t_1)$  vaut  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .
- L'angle dièdre de  $(s_1, s_3)$  vaut  $\alpha$ .

$Fix(\infty) \subset Iso(\mathbb{H}^3)$  agit transitivement sur les plans géodésiques ne contenant pas  $\infty$ . On peut donc supposer que  $t_1, t_2$  et  $t_3$  sont sur la demi-sphère (euclidienne) unité. La projection de  $\Delta'$  sur  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  est un triangle  $T$  d'angles  $\frac{\pi}{2}, \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Ainsi

$$v(\Delta') = \int_{\Delta'} \frac{dx dy dz}{z^3} = \int_T \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\infty} \frac{dz}{z^3} dx dy$$

$$v(\Delta') = \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} \frac{dy}{1-x^2-y^2}$$

Remarquons que

$$\frac{1}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y}} \right)$$

$$v(\Delta') = \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \log \frac{\sqrt{1-x^2} \cos \alpha + x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2} \cos \alpha - x \sin \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

On effectue le changement de variable  $x = \cos t$  et on obtient

$$v(\Delta') = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin(t+\alpha)}{\sin(t-\alpha)} dt$$

puis en développant

$$v(\Delta') = \frac{1}{4} (\Lambda(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \Lambda(2\alpha) - \Lambda(\frac{\pi}{2} + \alpha))$$

où on a défini la fonction de Lobatchevski

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^{\theta} \log |\sin t| dt$$

**Lemme 3.14.** — (1)  $\Lambda$  est continue.

(2)  $\Lambda$  est impaire.

(3)  $\Lambda$  est dérivable en tout point n'appartenant pas à  $\pi\mathbb{Z}$ .

(4)  $\Lambda$  est  $\pi$ -périodique.

(5)  $\forall m \in \mathbb{Z} \ \forall \theta \in \mathbb{R} \ \Lambda(m\theta) = m \sum_0^{m-1} \Lambda(\theta + \frac{k\pi}{m})$ .

On pourra trouver une preuve de ce résultat d'analyse dans [?].

Ainsi d'après (5) du lemme,  $\Lambda(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\Lambda(2\alpha) - \Lambda(\alpha)$  et  $\Lambda(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\frac{1}{2}\Lambda(2\alpha) + \Lambda(\alpha)$  ce qui donne en remplaçant

$$v(\Delta') = \frac{\Lambda(\alpha)}{2}$$

Revenons au tétraèdre  $\Delta$ . Il a été découpé en 6 simplexes de types  $\Delta'$  dont les angles dièdres caractéristiques sont  $\alpha$  deux fois,  $\beta$  deux fois et  $\gamma$  deux fois. Donc

$$v(\Delta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à étudier la fonction

$$\begin{aligned} \Psi &:= \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (a, b) &\longmapsto \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

où  $\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0 \ a + b < \pi\}$

$\Psi$  s'étend continument à  $\bar{\Omega}$  par  $\Psi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ , et donc la fonction  $\Psi$  étendue atteint son maximum car  $\bar{\Omega}$  est compact. De plus ce maximum est nécessairement atteint en un point intérieur car  $\Psi$  est positive et nulle sur le bord.

Sur  $\Omega$ ,  $\Psi$  est différentiable et donc son maximum est atteint en un point d'annulation de son gradient.

$$\partial_a \psi = \Lambda'(a) - \Lambda'(\pi - a - b)$$

$$\partial_b \psi = \Lambda'(b) - \Lambda'(\pi - a - b)$$

donc

$$\nabla \Psi = 0 \Leftrightarrow$$

et le volume de  $\Delta$  est donc maximal pour  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

### 3.3. Norme de Gromov et volume des variétés hyperboliques. —

*3.3.1. Homologie singulière.* — On rappelle ici brièvement la construction de l'homologie singulière dont nous allons nous servir.

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$  et  $A$  un anneau commutatif. On note, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^k$  le simplexe standard de dimension  $k$ .

Pour tout  $0 \leq k \leq n$  on définit l'ensemble des  $k$ -chaînes à coefficients dans  $A$  comme le  $A$ -module libre engendré par les fonctions continues  $\Delta^k \rightarrow M$ . On notera :

$$C_k = \left\{ \sum_{i \in I} a_i \varphi_i \mid |I| < +\infty, \forall i \ a_i \in A, \varphi_i \in C^0(\Delta^k, M) \right\}.$$

On définit par ailleurs l'opérateur

$$\begin{aligned} \partial_k &:= \mathcal{C}_k \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1} \\ \varphi &\longmapsto \sum_{i=1}^k (-1)^i \varphi|_{(e_0, \dots, \bar{e}_i, \dots, e_k)} \end{aligned}$$

sur n'importe quel  $k$ -simplexe  $\varphi : \Delta^k = (e_0, \dots, e_k) \longrightarrow M$  et on étend par  $A$ -linéarité.

Un simple calcul prouve que  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  ce qui implique que  $\text{Im}(\partial_{k+1}) = Z_k(M, A) \subset \text{Ker}(\partial_k) = B_k(M, A)$ . Les éléments de  $B_k$  sont appelés les cocycles et ceux de  $Z_k$  les cobords. On définit le  $k$ -ième groupe d'homologie par

$$H_k(M, A) = B_k(M, A) / Z_k(M, A)$$

On rappelle aussi ce résultat classique :

**Proposition 3.15.** — *Soit  $M$  une variété différentiable compacte orientable de dimension  $n$ . Alors*

$$H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

*De plus le choix d'une orientation sur  $M$  définit canoniquement un générateur de  $H_n(M, \mathbb{Z})$  qu'on notera  $[M]$ . C'est la classe fondamentale de  $M$ .*

**3.3.2. Norme de Gromov.** — Désormais on ne considérera plus que les groupes d'homologie à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Sauf mention du contraire  $H_k(M) = H_k(M, \mathbb{R})$ .

On définit la norme suivante sur  $\mathcal{C}_k$  : si  $c = \sum_i a_i \varphi_i$  est un cocycle,  $\|c\| = \sum_i |a_i|$ . Les sommes considérées étant finies, cela définit bien une norme sur  $\mathcal{C}_k$ . Maintenant posons, pour  $[C] \in H_k(M)$

$$\|[C]\| = \inf_{c \in [C]} \|c\|$$

$\|\cdot\|$  définit une semi-norme sur  $H_k(M)$

**Theorème 3.16.** — *Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte orientable. Alors*

$$\|[M]\| = \frac{\text{vol}(M)}{v_n}.$$

**3.3.3. Homologie mesurée.** — Il existe une définition de l'homologie, qui coïncide avec l'homologie singulière pour les variétés différentielles et permet d'alléger considérablement la preuve du théorème de Mostow.

On note  $\mathcal{C}^1(\Delta^k, M)$  l'ensemble des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  du simplexe de dimension  $k$  (muni de sa structure différentielle standard) dans  $M$ . On le munit de la topologie compact ouverte.  $\mathcal{C}_k^*$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des mesures boréliennes signées, à support compact et à variation totale finie. Il faut penser  $\mathcal{C}_k^*$  comme un prolongement continu de  $\mathcal{C}_k$  au sens où un simplexe singulier est naturellement représenté par la combinaison linéaire des mesures atomiques correspondantes.

L'inclusion  $\varphi_j : \Delta_k \longrightarrow \Delta_{k+1}$  induit un morphisme d'espace vectoriel  $\varphi_j^* : \mathcal{C}_{k+1}^* \longrightarrow \mathcal{C}_k^*$ . On définit l'opérateur /

$$\partial_k^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{k+1}^* & \longrightarrow & \mathcal{C}_k^* \\ \mu & \longmapsto & \sum_j (-1)^j \varphi_j^*(\mu) \end{array}$$

**Proposition 3.17.** — *Le complexe  $(\mathcal{C}_k^*, \partial_k^*)$  est un complexe de chaîne.*

La preuve est une simple vérification. On peut alors définir les groupes d'homologie mesurée  $H_k^*(M)$  associé à ce complexe de chaîne. Il existe un analogue de la norme de Gromov

**Definition 3.18.** — Soit  $\alpha \in H_k^*(M)$ . On définit la norme de Gromov (qui est en fait une semi-norme) PAR

$$\|\alpha\| = \inf_{[\mu]=\alpha} |\mu|$$

où  $|\mu|$  est la variation totale  $\mu$

Cette définition de l'homologie est suggérée par Thurston dans ses notes de cours sur la géométrie des variétés de dimension 3 (voir [16]). Cependant il n'est pas évident que cette définition coïncide avec une des définitions classiques, la première preuve dans la littérature se trouve dans [10]. Il faut attendre un papier relativement récent(2006, voir [12]) qui prouve le théorème suivant :

**Theorème 3.19.** — L'inclusion  $i : \mathcal{C}_k \rightarrow \mathcal{C}_k^*$  induit un isomorphisme

$$H_k(M) \simeq H_k^*(M)$$

qui est une isométrie pour les normes de Gromov définies précédemment.

3.3.4. *Preuve de l'égalité de Gromov.* — On prouve séparément les deux sens de l'égalité, en utilisant les deux définitions de l'homologie.

**Proposition 3.20.** — Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte orientable, alors

$$\|M\| \geq \frac{\text{vol}(M)}{v_n}$$

*Démonstration.* — L'idée de la preuve est de partir de n'importe quel représentant de la classe fondamentale  $\sum_i z_i \sigma_i$  et de remplacer les  $\sigma_i$  par des simplexes "droits" en un sens à préciser.

De manière générale, prenons  $\sigma : \Delta^n \rightarrow M$  un simplexe singulier. Il se relève en  $\tilde{\sigma} : \Delta^n \rightarrow \tilde{M} \simeq \mathbb{H}^n$ . Considérons le simplexe géodésique  $\sigma'$  dont les sommets sont  $\tilde{\sigma}(e_0), \dots, \tilde{\sigma}(e_n)$ . On notera désormais

$$\text{str}(\sigma) = p \circ \sigma'$$

où  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  est la projection canonique. Notons que la définition de  $\text{str}(\sigma)$  ne dépend pas du choix d'un relevé de  $\sigma$ .

Le simplexe  $\sum_i z_i \text{str}(\sigma_i)$  représente alors aussi la classe fondamentale de  $M$ . Ainsi

$$\text{vol}(M) = \int_M \Omega = \sum_i z_i \int_{\text{str}(\sigma_i)} \text{str}(\sigma_i)^*(\Omega) \leq \sum_i |z_i| v_n$$

En prenant l'infimum de tout les représentants, on obtient l'inégalité voulue. □

Il s'agit maintenant de représenter de manière efficace la classe fondamentale de  $M$ . C'est en cela que l'homologie mesurée permet de simplifier la démonstration car elle nous permet de considérer habilement des moyennes continuées.

**Proposition 3.21.** — Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte et orientable, alors

$$\|M\| \leq \frac{\text{vol}(M)}{v_n}.$$

*Démonstration.* — Comme  $M$  est une variété hyperbolique orientable,  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$ . Choisissons un simplexe géodésique  $\sigma = (e_0, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{H}^n$  avec des sommets deux à deux distincts, orienté positivement et notons  $v$  son volume. L'application qui à un élément  $\gamma \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$  associe  $(\gamma(e_0), \dots, \gamma(e_n))$  est une injection de  $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$  dans l'ensemble des simplexes réguliers de volume  $v$ . Cette application passe au quotient en une application injective de  $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^n)/\Gamma$  dans  $\mathcal{C}^1(\Delta^k, M)$ . Une mesure de Haar sur  $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^n)$  induit alors une mesure sur  $\mathcal{C}^1(\Delta^k, M)$ . Choisissons une mesure de Haar  $\mu$  normalisée de telle sorte que  $\mu(\{\gamma \mid \gamma(x_0) \in U\}) = \text{vol}(U)$  pour tout ouvert  $U$ . La mesure induite sera alors notée  $\text{smear}(\sigma)$ . On vérifie facilement que si  $\sigma_-$  est la réflexion de  $\sigma$  par rapport à l'une de ses faces,  $\frac{1}{2}(\text{smear}(\sigma) - \text{smear}(\sigma_-))$  est un cycle. C'est donc un multiple de la classe fondamentale.  $\nu = \frac{1}{2}(\text{smear}(\sigma) - \text{smear}(\sigma_-)) = \lambda[M]$ . D'une part, par définition,  $\|\nu\| = \text{vol}(M)$  par le choix de la normalisation. D'autre part calculons  $\lambda$  en intégrant la forme volume de  $M$  sur les simplexes :

$$\lambda \text{vol}(M) = \int_{\mathcal{C}^1(\Delta^k, M)} \int \sigma^*(\Omega) d\nu = v \cdot \text{vol}(M)$$

donc  $\|[\lambda M]\| \leq \frac{\text{vol}(M)}{v}$ . Il suffit alors de faire tendre  $v$  vers  $v_n$  pour obtenir le résultat.  $\square$

On déduit de cette égalité la proposition suivante :

**Proposition 3.22.** — *Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés hyperboliques compactes orientables de dimension  $n$ , ayant même type d'homotopie, alors*

$$\text{vol}(M_1) = \text{vol}(M_2).$$

*Démonstration.* — On a deux applications  $f : M_1 \rightarrow M_2$  et  $g : M_2 \rightarrow M_1$  qui induisent des isomorphismes  $H_n(M_1) \simeq H_n(M_2)$ . Cela implique d'une part  $\|[\lambda M_2]\| \leq \|[\lambda M_1]\|$  et d'autre part  $\|[\lambda M_1]\| \leq \|[\lambda M_2]\|$ . D'après l'égalité de Gromov, on obtient

$$\text{vol}(M_1) = \text{vol}(M_2)$$

.

$\square$

**3.4. Preuve du théorème de Mostow.** — La preuve repose sur la proposition suivante :

**Proposition 3.23.** — *L'application  $\tilde{f}$  envoie tout  $(n+1)$ -uplets de sommets d'un simplexe idéal régulier sur un tel autre  $(n+1)$ -uplet.*

*Démonstration.* — Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Prenons un simplexe idéal  $\sigma$  (dont les sommets appartiennent à  $\partial\mathbb{H}^n$ , de volume maximal  $v_n$ ), et supposons que  $\tilde{f}\sigma$  est de volume inférieur à  $v_n - 2\epsilon$ .

On choisit alors une suite de simplexes  $\sigma_k$  dont les sommets tendent vers ceux de  $\sigma$ . Ainsi  $\text{vol}(\sigma_k)$  tend vers  $v_n$ .

Considérons la mesure  $\mu_k = \frac{1}{2}(\text{smear}(\sigma_k) + \text{smear}(\sigma_k^-))$ . La chaîne  $\text{str}(\tilde{f}_*(\mu_k))$  représente alors  $\text{vol}(\sigma_k) \cdot [M_2]$  car  $f$  est une équivalence d'homotopie. Mais pour  $k$  suffisamment grand et pour tout  $g \in U$  un petit voisinage de l'identité dans  $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^n)/\Gamma_1$ ,  $\text{vol}(\text{str}(\tilde{f}g\sigma_k)) < v_n - \epsilon$  par continuité de  $\tilde{f}$ . Ainsi, en intégrant la forme volume hyperbolique sur  $\text{str}(\tilde{f}_*(\mu_k))$  on trouve

$$\int_{\mathcal{C}^1(\Delta^n, M_2)} \int_{\Delta^n} \sigma^* \Omega \text{dstr}(\tilde{f}_*(\mu_k)) \leq \mu_{\text{Haar}}(U)(v_n - \epsilon) + (\text{vol}(M_1) - \mu_{\text{Haar}}(U))v_n < v_n \cdot \text{vol}(M_1) = \text{vol}(M_2)$$

Quand  $k$  tend vers l'infini, cela contredit le fait que  $\text{str}(\tilde{f}_*(\mu_k))$  représente alors  $\text{vol}(\sigma_k) \cdot [M_2]$ . Ce qui démontre la proposition.  $\square$

**Proposition 3.24.** — *Soit  $u : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  une application continue qui envoie les sommets d'un simplexe idéal sur les sommets d'un simplexe idéal. Alors  $u \in \text{Conf}(S^{n-1})$ , ou de manière équivalente est la restriction au bord d'un élément de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ .*

*Démonstration.* — Partons d'un simplexe idéal  $\sigma$ . Quitte à composer  $u$  par un élément de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$  bien choisi, on peut supposer que  $u$  est l'identité sur les sommets de  $\sigma$  et préserve l'orientation. Considérons maintenant une face de  $\sigma$ . Il existe un unique autre simplexe idéal partageant cette face, c'est le simplexe réfléchi par rapport à cette face.  $u$  doit donc envoyer ce simplexe sur lui-même. Maintenant, comme l'orbite des sommets de  $\sigma$  via le groupe engendré par les réflexions selon les faces de  $\sigma$  est dense dans  $S^{n-1}$ ,  $u$  est l'identité sur un sous-ensemble dense de  $S^{n-1}$  et donc par continuité sur tout  $S^{n-1}$ .  $\square$

On peut désormais conclure la preuve du théorème 3.1. En effet soit  $g$  l'isométrie qui coïncide avec  $\tilde{f}$  sur le bord. D'une part  $g$  et  $\tilde{f}$  sont homotopes, via l'application  $h(t, x)$  qui à un point  $x$  associe le point de l'unique géodésique en  $t$  ( $t \in [0, 1]$ ) allant de  $\tilde{f}(x)$  à  $g(x)$  (si ces derniers sont différents, sinon  $h(t, x) = g(x) = \tilde{f}(x)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ). Cette application est équivariante par les actions de  $\pi_1(M_1)$  et  $\pi_1(M_2)$  car elle l'est sur le bord. Elle induit donc une isométrie  $M_1 \rightarrow M_2$  homotope à  $f$ .

#### 4. Théorème de Borel et variétés hyperboliques

Une question à priori pas évidente est l'existence de variétés hyperboliques compactes en dimension quelconque. Si les petites dimensions sont géométriquement bien comprises (voir section 2), la question devient non triviale dès la dimension 4. On construit dans cette sections des variétés hyperboliques compactes en toutes dimensions supérieures à 4.

**4.1. Réseaux du groupe de Lie  $SO(n, 1)$ .** — Le point de vue à adopter pour exhiber des variétés hyperboliques en grande dimension est plus algébrique. On suit dans cette section un démarche proposée dans [15], simplifiée pour notre propos.

**Théorème 4.1 (Borel).** — *Le groupe de  $\Gamma = \text{Aut}(\varphi) \cap \mathbf{GU}(n, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  est un réseau cocompact de  $\text{Aut}(\varphi) \simeq \mathbf{O}(n, 1)$*

Ce théorème combiné à un théorème de théorie des groupes nous assure l'existence de variétés hyperboliques compactes. Ce point de vue n'étant pas constructif, il est assez dur de lire la structure générale des variétés ainsi obtenues. On donne une preuve de ce théorème, qui peut-être généralisé dans le cadre des groupes algébriques sur  $\mathbb{Q}$  dont nous n'avons pas besoin pour notre propos.

Dans la suite  $K$  désigne  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  et  $A$  l'anneau des entiers de  $K$  qui est  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .  $K$  est une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$  de degré 2. Le groupe de Galois de  $K$  est donc engendré par l'involution de conjugaison  $\sigma : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ . L'image de l'application

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\longmapsto (a, \sigma(a)) \end{aligned}$$

est un réseau de  $\mathbb{R}^2$  (i.e c'est un sous groupe discret de rang 2).

Construisons maintenant l'espace vectoriel  $E = E_1 \oplus E_2$  où  $E_1$  et  $E_2$  sont des copies de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Posons

$$\Lambda = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \oplus (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_{n+1})) \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in A^{n+1}\}$$

$\gamma$  est un réseau de  $E$ . Soit  $q = x_1^2 + \dots + x_n^2 - \sqrt{2}x_{n+1}^2$ . Alors  $\sigma \cdot q = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sqrt{2}x_{n+1}^2$ . Définissons

$$G = \{g \in \text{Sl}(E) \mid g(E_i) = E_i, g|_{E_1} \in O(q), g|_{E_2} \in O(\sigma \cdot q)\}$$

et

$$\Gamma = \{g \in G \mid g\Lambda = \Lambda\}$$

Alors l'orbite de  $\Lambda$  dans l'espace des réseaux de  $E$  (noté  $\mathcal{R}$ ) s'identifie avec  $G/\Gamma$ . Plus précisément l'application

$$\begin{array}{ccc} G/\Gamma & \longrightarrow & R \\ g & \longmapsto & g\Lambda \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image.

**Proposition 4.2.** — *L'orbite  $G\Lambda$  est fermée dans  $\mathcal{R}$ .*

*Démonstration.* — Regardons la fonction qui à un élément  $v = v_1 + v_2 \in E$  associe le polynôme  $P_v(X) = (X - q(v_1))(X - \sigma \cdot q(v_2))$ . Remarquons que pour tout  $v$  appartenant à l'orbite d'un élément de  $\Lambda$ ,  $P_v \in \mathbb{Z}[X]$ . En effet si  $v = g(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2)$ ,  $P_v(X) = (X - \alpha)(X - \sigma(\alpha))$  où  $\alpha = q(\lambda_1) \in A$ . Comme  $\alpha$  est un entier algébrique,  $P_v \in \mathbb{Z}[X]$ .

Maintenant supposons que  $g_i\Lambda \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \Lambda'$ . Cela est équivalent à ce qu'une suite de bases des  $g_i\Lambda$ , disons  $(\lambda_k^i)_{k \leq 2n+2}$  tende vers une base  $(\mu_k)_k$ .

$$P(\lambda_k^i) \longrightarrow P(\mu_k)$$

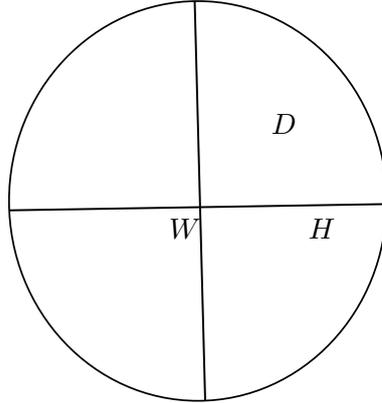
Comme  $P(\lambda_k^i)$  est à coefficients entiers, cette suite est constante à partir d'un certain rang, égale à  $P(\mu_k)$ . Idem pour les suites  $P(\lambda_k^i - \lambda_{k'}^i)$ . Les  $P(\lambda)$  déterminent  $q(\lambda_1)$  et  $\sigma \cdot q(\lambda_2)$  à 2 possibilités près. Comme  $q(\lambda_k^i) \longrightarrow q(\mu_k)$ , il existe un rang  $j$  tel que  $q(\lambda_k^i) = q(\mu_k)$ ,  $\sigma \cdot q(\lambda_k^i) = \sigma \cdot q(\mu_k)$ ,  $q(\lambda_k^i - \lambda_{k'}^i) = q(\mu_k - \mu_{k'})$  et  $\sigma \cdot q(\lambda_k^i - \lambda_{k'}^i) = \sigma \cdot q(\mu_k - \mu_{k'})$ . Il existe donc un unique élément  $g \in G$  tel que  $g(\lambda_k^j) = \mu_k$  pour tout  $k$ , ainsi  $\Lambda' = gg_j(\Lambda)$ . □

**Lemme 4.3 (Critère de compacité de Mahler).** — *Une partie  $\mathcal{A}$  de l'espace des réseaux  $\mathcal{R}$  de  $E$  est précompacte si et seulement si elle est à volume bornée et qu'il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $E$  tel que  $\forall \Gamma \in \mathcal{A}, \Gamma \setminus \{0\} \cap U = \emptyset$*

**Proposition 4.4.** — *L'espace  $G/\Gamma$  est compact.*

*Démonstration.* — C'est une application du critère de compacité de Malher. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite  $v_n = v_{n,1} + v_{n,2} \neq 0$  de vecteurs appartenant à  $g_n\Lambda$  pour un certain  $g_n \in G$  tels que  $|v_n| \longrightarrow 0$ . Alors comme  $P_{v_n} \in \mathbb{Z}[X]$  et que  $P_{v_n} \longrightarrow P_0$ , pour  $n$  assez grand,  $P_{v_n} = P_0 = X^2$ , ce qui implique que  $q(v_{n,1}) = q(v_{n,2}) = 0$ . Ce qui contredit le fait que la forme quadratique  $q$  ne représente pas 0 sur  $\Lambda$ . □

Maintenant comme  $G \simeq \text{S0}(n, 1) \times \text{S0}(n + 1)$  et  $\text{S0}(n + 1)$  est compact, le quotient  $\text{S0}(n, 1)/\Gamma$  est compact (on a ici abusivement confondu  $\Gamma$  et sa projection sur  $\text{S0}(n, 1)$ ). On a ainsi construit le réseau cocompact recherché!

FIGURE 3. Schéma de la variété hyperbolique  $V$ 

**4.2. Construction d'une variété avec des symétries.** — D'après le théorème de Borel étudié à la section précédente, le sous-groupe  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $SO(n, 1)$ . Ce réseau contient en particulier la réflexion par rapport à l'hyperplan  $\{x_1 = 0\}$ , notée  $s$  et la rotation  $r$ ,  $(x_1, x_2) \rightarrow (-x_2, x_1)$  qui engendrent un groupe  $D_4 \subset \Gamma$ .

**Théorème 4.5 (Lemme de Selberg).** — *Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$  de type fini. Alors  $G$  est virtuellement sans torsion (i.e contient un sous groupe d'indice fini sans torsion)*

On pourra trouver une preuve de ce théorème dans [1].

En appliquant 4.5 à  $\Gamma$ , on trouve  $\Gamma' \subset \Gamma$  tel que  $[\Gamma' : \Gamma] < \infty$  de telle sorte que le quotient  $\mathbb{H}^n / \Gamma' = V$  est une variété hyperbolique. De plus, comme  $r$  et  $s$  normalisent  $\Gamma$ , on a une action  $D_4 \curvearrowright V$  par isométries. On notera désormais  $H$  l'ensemble des points fixes de  $s$  (qui est par définition une sous-variété totalement géodésique de codimension 1). Quitte à passer à un revêtement double, on peut supposer que  $H$  sépare  $V$ .

**Proposition 4.6.** — *La variété  $V$  peut être découpée en 4 sous-variétés à bord isométriques notés  $D$ , qui sont des domaines fondamentaux pour l'action de  $D_4$ , s'intersectant le long d'hypersurfaces.*

*Démonstration.* — Comme  $H$  sépare  $V$ ,  $H$  est le bord d'une sous variété  $A$  de telle sorte que  $M = A \cup sA$  et  $A \cap sA = H$  car  $s$  est une réflexion. Soit  $D = rA \cap A$ . Comme  $r^2$  commute avec  $s$ ,  $r^2$  laisse fixe  $H$ . Comme  $r^2$  est une isométrie non triviale, elle échange nécessairement  $A$  et  $sA$ . Soit  $H^+ = D \cap rD$  alors  $W \subset H$  car

$$H^+ = A \cap rA \cap sA = H \cap rA$$

$$\text{et } H^+ \cup sH^+ = (A \cap rA \cap sA) \cup (sA \cap rsA \cap A) = (A \cap sA) \cap (rA \cup rsA) = H$$

$$W = H \cap rH = H^+ \cap rH^+$$

$$V = \bigcup_{i=0}^3 r^i D$$

et

$$\partial D = H^+ \cup rH^+$$

et finalement

$$\partial H^+ = W$$

□

## 5. Construction de métriques à courbure négative

On peut construire un revêtement ramifié cyclique d'ordre  $i$  au dessus de  $V$  en recollant le long de  $W$   $4i$  secteur  $D$ . (Une construction plus formelle et systématique est donnée plus loin par la proposition 7.2). Notons  $V_i$  cette variété. On montre dans cette section le théorème suivant :

**Theorème 5.1.** — *La variété  $V_i$  peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle partout inférieure à  $-1$ .*

### 5.1. Métrique hyperbolique dans la carte exponentielle. —

**Lemme 5.2.** — *La métrique hyperbolique s'écrit dans une carte exponentielle normale à  $W$*

$$dr^2 \oplus \sinh^2(r)d\theta^2 \oplus \cosh^2(r)dx^2$$

*Démonstration.* — On regarde dans une carte du type  $(r, \theta, x)$  où  $(0, 0, x)$  repère un point dans  $W$  et  $(., ., x)$  est la(une) carte exponentielle du plan orthogonal à  $W$  en  $x$ . Remarquons alors qu'on peut décrire la métrique le long des courbes  $x$  et  $\theta$  constant à l'aide des champs de Jacobi.

On part de la remarque suivante : les champs  $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-2}}$  sont des champs de Jacobi car ils sont tous issus d'une variation géodésique. Comme la courbure sectionnelle est constante égale à  $-1$  ces champs vérifient tous l'équation  $Y'' = Y$  le long d'une géodésique paramétrée par  $r$ . Soient  $X(r)$  et  $Y(r)$  deux de ces champs. On pose  $f(r) = g(X(r), Y(r))$ . Montrons que  $f$  vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

$$\begin{aligned} f'(r) &= g(X', Y) + g(X, Y') \\ f''(r) &= g(X'', Y) + 2g(X', Y') + g(X, Y'') \\ f''(r) &= 2f(r) + 2g(X', Y') \end{aligned}$$

Maintenant on pose  $h(r) = g(X', Y')$ , et on remarque que  $h'(r) = g'(r)$  car  $X$  et  $Y$  sont des champs de Jacobi. Ainsi  $h(r) = g(r) + h(0) - g(0)$  ce qui donne

$$f''(r) = 4f(r) + 2g(X'(0), Y'(0)) - 2g(X(0), Y(0))$$

Il n'y a plus qu'à résoudre cette équation pour tout les couples  $(X, Y)$  parmi les  $n$  champs proposés précédemment en se rappelant que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$  et que pour tout  $i$ ,  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial x_i}(0) = 0$

□

On s'intéresse maintenant la variété  $V$  revêtue par  $V_i$ . Le lieu de ramification de ce revêtement est la sous-variété  $W$  qui est de codimension 2. Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, l'application exponentielle normale à  $W$  est un difféomorphisme sur l' $\epsilon$ -voisinage de  $W$ . Dans une carte convenable, le revêtement s'écrit

$$(r, \theta, x) \xrightarrow{P_i} (r, i\theta, x)$$

Ainsi le tiré en arrière de la métrique hyperbolique s'écrit dans la carte

$$dr^2 \oplus i^2 \sinh^2(r)d\theta^2 \oplus \cosh^2(r)dx^2$$

On cherche une métrique déformée de la forme

$$g' = dr^2 \oplus \sigma(r)^2 d\theta^2 \oplus \cosh^2(r)dx^2$$

avec  $\sigma(r) = \sinh(r)$  pour  $r$  petit et  $\sigma(r) = i \sinh(r)$ .

## 5.2. Calcul des courbures sectionnelles. —

**Proposition 5.3.** — *Le tenseur de courbure de  $g'$  est nul sauf pour les courbures sectionnelles*

*Démonstration.* — On note désormais  $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$  et  $\partial_\theta = \frac{\partial}{|\frac{\partial}{\partial \theta}|}$ . Soit  $H(\theta) = H$  une hypersurface  $\theta$  constant. C'est une hypersurface totalement géodésique car elle est fixée par la réflexion selon les axes  $\theta$  constant dans les plans  $x$  fixé, qui est une isométrie.

–  $R(X, Y, \partial\theta) = 0$  pour tout  $X, Y$  tangents à  $H$

$$\nabla_X \partial\theta = 0$$

pour tout vecteur  $X$  tangent à  $H$ . En effet, comme  $\partial\theta$  est normé  $\nabla_X \partial\theta \perp \partial\theta$ . D'autre part comme  $g(\partial\theta, Y) = 0$  pour tout  $Y \in TH$  en dérivant on obtient

$$g(\partial\theta, \nabla_X Y) + g(\nabla_X \partial\theta, Y) = 0$$

. Mais comme  $H$  est totalement géodésique  $\nabla_X Y \in TH$  donc  $g(\partial\theta, \nabla_X Y) = 0$  et donc  $\nabla_X \partial\theta = 0$ . Ainsi pour vecteurs  $X$  et  $Y \in TH$ ,

$$R(X, Y, \partial\theta) = 0$$

–  $R(X, \partial\theta, \partial\theta)$  est parallèle à  $X$  pour tout  $X$  tangent à  $H$

$$R(X, \partial\theta, \partial\theta) = \nabla_X \nabla_{\partial\theta} \partial\theta - \nabla_{\partial\theta} \nabla_X \partial\theta - \nabla_{[X, \partial\theta]} \partial\theta$$

Remarquons déjà que le second terme est nul car  $\nabla_X \partial\theta$  est nul car  $H$  est totalement géodésique.

Distinguons deux cas selon que  $X$  est perpendiculaire à  $\partial r$  ou parallèle à  $\partial r$

(1) Si  $X$  est perpendiculaire à  $\partial r$ , quitte à choisir  $X$  tel que  $[X, \partial\theta] = 0$  on trouve que  $R(X, \partial\theta, \partial\theta) = \nabla_X \nabla_{\partial\theta} \partial\theta$ . Mais  $\nabla_{\partial\theta} \partial\theta = f(r) \partial r$  pour une certaine fonction  $f$  et comme  $\partial_X \partial r$  est parallèle à  $X$ ,  $R(X, \partial\theta, \partial\theta)$  est parallèle à  $X$

(2) Si  $X = \partial r$  c'est la même chose en remarquant que  $[\partial r, \partial\theta]$  est parallèle à  $\partial r$

– Maintenant, on montre proprement que le tenseur de courbure est diagonal dans la base  $(X_r = \partial r, X_\theta = \partial\theta, X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_{n-2} = \frac{\partial}{\partial x_{n-2}})$  Comme les surfaces  $H$  sont totalement géodésiques le résultat est vrai pour tous les termes ne faisant pas intervenir  $X_\theta$ . De plus pour tout  $i, j \in \{r, 1, \dots, n-2\}$  tel que  $i \neq j$

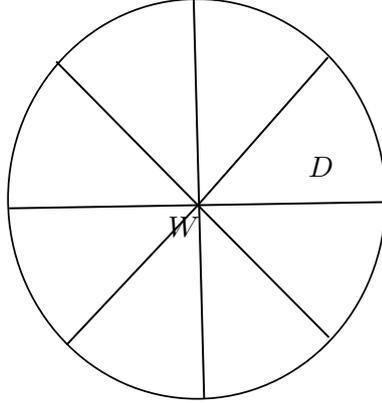
$$R(X_i, X_j, X_i, X_j) = -1$$

– Si un terme  $\theta$  intervient, les calculs précédents nous permettent d'affirmer que le tenseur est nul à moins qu'il s'agisse d'une courbure sectionnelle (à permutation près). Il nous reste donc à calculer  $R(\partial r, \partial\theta, \partial r, \partial\theta)$  et  $R(X_i, \partial\theta, X_i, \partial\theta)$  pour  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ .

Comme la métrique s'écrit  $dr^2 \oplus \sigma^2(r) d\theta^2$  sur les plans géodésiques, c'est un résultat classique de théorie des surfaces que  $R(\partial r, \partial\theta, \partial r, \partial\theta) = -\frac{\sigma''(r)}{\sigma(r)}$

– Comme  $\nabla_{\partial\theta} \partial\theta$  est parallèle à  $\partial r$ , et que les rotations d'axe  $V$  sont des symétries,  $\nabla_{\partial\theta} \partial\theta = f(r) \partial r$  pour une certaine fonction  $f$ . En dérivant  $g(\partial\theta, \partial r)$  en direction  $\partial\theta$  on obtient

$$f(r) = -\frac{1}{\sigma^2(r)} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \partial r, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

FIGURE 4. La variété  $V_i$ , avec  $i = 2$ 

et, connaissant l'écriture de la connexion de Levi-Civita en coordonnées, on obtient

$$f(r) = -\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)}$$

Ainsi

$$R(X_i, \partial\theta, \partial\theta) = -\frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)} \nabla_{X_i} \partial r$$

En calculant encore en coordonnées on obtient  $\nabla_{X_i} \partial r = -\tanh(r) X_i$  ce qui nous donne

$$R(X_i, \partial\theta, X_i, \partial\theta) = -\tanh(r) \frac{\sigma'(r)}{\sigma(r)}$$

□

Il suffit ensuite de vérifier que les fonctions  $\sinh$  et  $i \cdot \sinh$  peuvent être interpolées de telle sorte que la courbure sectionnelle soit toujours inférieure à  $-1$ .

**Remarque.** — On remarquera que plus le rayon d'injectivité en  $W$  est grand, plus les fonctions  $\sinh$  et  $i \sinh$  peuvent être interpolées sur un grand intervalle. Ceci qui permet de rendre la courbure arbitrairement proche de  $-1$  quand le rayon d'injectivité tend vers l'infini. En travaillant un peu plus la construction de  $V$ , on peut effectivement choisir ce rayon arbitrairement grand et construire des variétés à courbure sectionnelle pincée  $-1 - \epsilon \leq K \leq -1$ .

## 6. Première famille de contre-exemples

On donne dans cette section une première construction de variétés non hyperboliques, mais qui portent une métrique à courbure strictement négative. On a construit, pour tout  $i$ , un revêtement ramifié cyclique de degré  $i$  le long d'une sous variété  $W$  de codimension 2, en recollant le long de deux sous-variétés  $H$  de codimension 1 des ouverts à bord  $D$ .

Cette construction est suggérée dans [8] (Remarque 3.6). Cette section constitue en une écriture détaillée de cette construction, s'appuyant énormément sur [15]. L'idée d'utiliser l'application de Eels-Sampson pour la preuve de la proposition 6.6 m'a été suggérée par P.Pansu

$$\begin{array}{ccc}
 & & V_i \\
 & \nearrow^{j_i} & \downarrow p_i \\
 W & \xrightarrow{j} & V
 \end{array}$$

Soit  $j$  et  $j_i$  les injections canoniques de  $W$  dans  $V$  et  $V_i$  respectivement. On rappelle que la sous variété  $W$  est totalement géodésique dans  $V$  et  $V_i$ , et que le

**6.1. Géométrie du groupe fondamental.** —

**Proposition 6.1.** — (1) *Le morphisme induit par l'injection  $j_i$ ,  $(j_i)_* : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(V_i)$  est injectif. De plus c'est une quasi-isométrie pour la distance des mots*

(2) *Les morphismes induits par les injections  $i_k$ ,  $(i_k)_* : \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(V_i)$  pour  $k \leq 2_i$  sont injectifs, et sont des quasi-isométries pour la distance des mots*

*Démonstration.* — La première partie est évidente car  $W$  est totalement géodésique pour la métrique  $h'_i$ . Pour la deuxième partie, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi_1(V_i) \\
 & \nearrow^{(i_k)_*} & \downarrow (p_i)_* \\
 \pi_1(H) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(V)
 \end{array}$$

où  $i_*$  est une quasi-isométrie. Si  $x, y \in \pi_1(H)$ ,  $d(x, y) \leq d((i_k)_*(x), (i_k)_*(y))$ . Maintenant comme  $i_*$  est une quasi-isométrie et  $i_* = (i_k)_* \circ (p_i)_*$ , les constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$d(i_*(x), i_*(y)) \geq c_1 d(x, y) - c_2$$

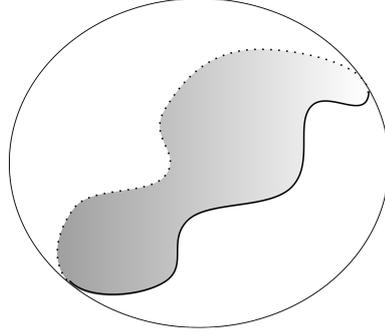
fonctionnent pour  $(i_k)_*$  car  $(p_i)_*$  est 1-lipschitzienne. □

On rappelle un théorème classique de théorie géométrique des groupes, dont on peut trouver une démonstration dans [3] :

**Théorème 6.2.** — *Soit  $M$  une variété riemannienne compacte. Soit  $\Gamma$  un graphe de Cayley de  $\pi_1(M)$ . Le plongement standard  $\Gamma \rightarrow \tilde{M}$  est une quasi-isométrie.*

Ce théorème nous dit en substance que la géométrie du revêtement universel d'une variété est très proche de celle de son groupe fondamental. La proposition suivante nous donne une condition sur le groupe fondamental d'une sous variété d'une variété hyperbolique pour que celle-ci soit proche d'une sous-variété totalement géodésique.

**Proposition 6.3.** — *Soit  $X$  et  $Y$  deux variétés hyperboliques compactes telles que  $k = \dim(Y) < n = \dim(X)$ . On suppose que  $Y$  se plonge (pas forcément isométriquement) dans  $X$  de telle sorte que  $\pi_1(Y)$  est quasi-isométriquement plongé dans  $\pi_1(X)$ . Soit  $\tilde{Y}$  une composante connexe de la préimage de  $Y$  dans  $\tilde{X} \simeq \mathbb{H}^n$ .  $\tilde{Y}$  munie de la métrique hyperbolique tirée en arrière est isométrique à  $\mathbb{H}^k$ . Alors l'injection  $\mathbb{H}^k \rightarrow \mathbb{H}^n$  est une quasi-isométrie et se prolonge en un plongement  $\partial_\infty \mathbb{H}^k \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^n$*

FIGURE 5. Plan hyperbolique quasi isométriquement plongé dans  $\mathbb{H}^3$ 

*Démonstration.* — C'est une simple application du théorème précédent. Le fait que le groupe fondamental de  $Y$  soit plongé dans celui de  $X$  nous assure qu'une composante de l'image réciproque de  $Y$  est une boule topologique, et ensuite on a le diagramme commutatif suivant (avec les quasi-isométrie impliquée par le théorème précédent) :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\pi_1(Y)} & \xrightarrow{q.i.} & \Gamma_{\pi_1(X)} \\ q.i. \downarrow & & \downarrow q.i. \\ \mathbb{H}^k & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \end{array}$$

ce qui implique que la flèche du bas doit être une quasi isométrie. □

**6.2. Découpage selon des hypersurfaces géodésiques.** — On suppose désormais que  $V_i$  possède une métrique hyperbolique  $h'_i$ . On va montrer qu'elle possède un découpage analogue à celui décrit dans la section précédente. On rappelle que le groupe  $D_{4i}$  agit sur  $V_i$  par difféomorphisme en permutant les parties  $D_k$

**Lemme 6.4.** — *Le groupe fondamental de  $V_i$  possède un groupe  $D_{4i}$  d'automorphismes. Ce groupe agit par isométries sur  $V_i$*

*Démonstration.* — On prouve que  $D_{4i}$  agit par isométries : il suffit d'appliquer le théorème de Mostow au groupe  $D_{4i}$  agissant par homéomorphisme et remarquer qu'aucun élément n'est envoyé sur l'identité. En particulier, les réflexions renversent l'orientation, et le □

Un ingrédient de la preuve est le théorème de géométrie riemannienne suivant, dont on pourra trouver une preuve dans [5].

**Theorème 6.5 (Eels-Sampson,1964).** — *Soit  $X$  une variété riemannienne compacte et  $Y$  une variété riemannienne compacte à courbure négative. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors il existe une unique application  $h : X \rightarrow Y$  harmonique et homotope à  $f$ .*

**Proposition 6.6.** — (1) *L'ensemble des points fixés par  $D_{4i}$  est une sous variété de dimension 2 isométrique à  $W$*

(2) *L'ensemble des points fixés par chacun des  $2i$  éléments d'ordre 2 de  $D_{4i}$  est une hypersurface isométrique à  $H$ .*

- (3) L'intersection de deux de ses hypersurfaces est égale à  $W$
- (4) Ces  $2i$  hypersurfaces découpent  $V_i$  en  $4i$  ouverts à bord  $(\Delta_k)_{k \leq 4i}$  isométriques.
- (5)  $\pi_1(\Delta) \simeq \pi_1(D)$

Pour donner une preuve de cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 6.7.** — *Soit  $Y$  une sous variété compacte totalement géodésique de  $X$  une variété riemannienne compacte. On suppose que*

- (1)  $\text{codim}(Y) = 1$  ou  $2$
- (2)  $Y$  est l'ensemble des points fixés par une isométrie  $\tau$  d'ordre fini, préservant l'orientation si  $\text{codim}(Y) = 2$ .

Soit  $\tilde{Y}$  une composante connexe de l'image réciproque de  $Y$  dans le revêtement universel de  $X$  et  $\tilde{\tau}$  un relevé de  $\tau$  fixant  $\tilde{Y}$ . Alors

$$\pi_1(Y) \simeq \{\gamma \in \pi_1(X) \mid \tilde{\tau} \circ \alpha = \tilde{\tau} \circ \gamma\}$$

Si de plus  $X$  est hyperbolique,

$$\pi_1(Y) \simeq \{\gamma \in \pi_1(X) \mid \partial_\infty \tilde{\tau} \circ \partial_\infty \alpha = \partial_\infty \tilde{\tau} \circ \partial_\infty \gamma\}$$

*Démonstration.* — On se rappelle tout d'abord que  $\pi_1(Y)$  s'identifie naturellement au stabilisateur de  $\tilde{Y}$ . Si  $\gamma$  commute avec  $\tilde{\tau}$ ,  $\gamma$  laisse stable l'ensemble des points fixes de  $\tau$  qui est  $\tilde{Y}$ . Réciproquement si  $\gamma$  laisse stable  $\tilde{Y}$  alors  $\tilde{\tau}_{|\tilde{Y}} = (\gamma \circ \tilde{\tau} \circ \gamma^{-1})_{|\tilde{Y}} = Id_{|\tilde{Y}}$ . Regardons les différentielles de ces deux applications en un point  $y_0$  quelconque de  $\tilde{Y}$ . Elles préservent le plan tangent à  $\tilde{Y}$  en ce point à cause de l'égalité précédente. Etant toutes deux des isométries de la métrique elles laissent toutes les deux stable l'orthogonal de  $T_{y_0} \tilde{Y}$ . Elles sont aussi toutes deux du même ordre fini, ce qui en codimension 1, et en codimension 2 si l'orientation est préservée, caractérise complètement l'isométrie. On a donc ici deux isométries qui coïncident en un point et dont les différentielles en ce point coïncident. Elles sont donc égales. □

On a une version renforcée de ce lemme pour les variétés  $V_i$  :

**Lemme 6.8.** — (1) Soit  $(H_k)_{k \leq 2i}$  les hypersurfaces du découpage précédent, et soit  $\tau_k$  la réflexion fixant  $H_k$ . Soit  $\tilde{H}_k$  une composante connexe de l'image réciproque de  $\tilde{H}_k$  au revêtement universel de  $V_i$ ,  $\tilde{\tau}_k$  un relèvement de  $\tau_k$  fixant  $\tilde{H}_k$ , et soit  $\partial_\infty \tilde{\tau}_k$  le prolongement de  $\tilde{\tau}_k$  à  $\partial_\infty \tilde{V}_i$ . Alors

$$\pi_1(H_k) = \{\gamma \in \pi_1(V_i) \mid \partial_\infty \gamma \circ \partial_\infty \tilde{\tau}_k = \partial_\infty \tilde{\tau}_k \circ \partial_\infty \gamma\}$$

(2) Soit  $W$  la sous-variété du découpage précédent, et soit  $r$  la réflexion fixant  $W$ . Soit  $\tilde{W}$  une composante connexe de l'image réciproque de  $W$  au revêtement universel de  $V_i$ ,  $\tilde{r}$  un relèvement de  $r$  fixant  $\tilde{W}$ , et soit  $\partial_\infty \tilde{r}$  le prolongement de  $\tilde{r}$  à  $\partial_\infty \tilde{V}_i$ . Alors

$$\pi_1(W) = \{\gamma \in \pi_1(V_i) \mid \partial_\infty \gamma \circ \partial_\infty \tilde{r} = \partial_\infty \tilde{r} \circ \partial_\infty \gamma\}$$

*Démonstration.* — On va dans un premier temps donner une preuve détaillée du premier point. Soit  $\tau$  une réflexion (pour la métrique  $h'_i$  non hyperbolique) de  $D_{4i}$  qui fixe  $H$ . Soit  $\tilde{H}$  une composante connexe de l'image réciproque de  $W$  au revêtement universel  $\tilde{V}_i$  vu comme  $\mathbb{H}^n$ , fixée par un relevé  $\tilde{\tau}$  de  $\tau$ . Les lemmes 6.1 et 6.3 nous disent que la frontière de  $\tilde{H}$  dans  $\mathbb{H}^n$

est homéomorphe à  $S^{n-2}$ .  $\tilde{\tau}$  coïncide à l'infini avec une isométrie d'ordre 2 qui fixe l'enveloppe convexe de la frontière de  $\tilde{W}$ . L'ensemble des points fixes de cette isométrie est soit  $\mathbb{H}^n$  entier, soit un hyperplan. La première possibilité est écartée car sinon cette isométrie serait l'identité. La frontière de  $\tilde{H}$  est donc une hypersphère ronde. L'hyperplan défini par cette sphère s'immerge dans  $V_i$ , et l'image de cette immersion est homotope à  $H$ . On veut montrer que cette image est une sous-variété, ce qui équivaut au fait que les hyperplans définis par les composantes connexes de  $\tilde{H}$  ne se croisent pas. Et c'est effectivement le cas, car  $\partial_\infty \tilde{H}$  sépare  $\partial_\infty \tilde{V}_i$ . Enfin cette sous-variété est compacte seul un nombre fini d'hyperplans peuvent traverser un domaine fondamental donné. Il nous reste à montrer que cette sous-variété  $H'$  est homéomorphe à  $H$ . D'après les lemmes 6.7 et 6.8,

$$\pi_1(H') = \{\gamma \in \pi_1(V_i) \mid \partial_\infty \gamma \circ \partial_\infty \tilde{\tau} = \partial_\infty \tilde{\tau} \circ \partial_\infty \gamma\}$$

et coïncide donc avec  $\pi_1(H)$ .  $H$  et  $H'$  sont donc deux variétés hyperboliques compactes et orientables de même dimension dont les  $\pi_1$  sont isomorphes. Le théorème de rigidité de Mostow nous assure que  $H$  et  $H'$  sont homéomorphes (et même isométriques si on les regarde avec leurs métriques hyperbolique. En particulier,  $H' \subset V_i$  est isométrique à  $H \subset V$ ).  $H$  étant homotope à  $H'$ ,  $H'$  sépare toujours  $V_i$ .

La démonstration du second point est analogue à celle du premier, à ceci près que l'argument qui prouve que  $W'$  est plongé est le fait que  $W'$  est l'intersection de deux hypersurfaces  $H_k$ .

Il reste à montrer que  $\pi_1(D) \simeq \pi_1(\Delta)$ . Considérons l'application identité de  $V_i$  munie de la métrique hyperbolique  $h_i$  dans  $V_i$  munie de  $g_i$  la métrique à courbure négative construite dans la section 5. D'après le théorème de Eels-Sampson, il existe une fonction  $f : (V_i, h_i) \rightarrow (V_i, g_i)$  harmonique homotope à l'identité, en particulier  $f_* : \pi_1(V_i) \rightarrow \pi_1(V_i)$  est l'identité.

- (1)  $f$  conjugue l'action de  $D_{4i}$  sur  $(V_i, h_i)$  à l'action de  $D_{4i}$  sur  $(V_i, g_i)$ .
- (2)  $f$  envoie les hypersurfaces  $H_k$  sur les hypersurfaces  $H'_k$ .
- (3)  $f$  envoie  $W$  sur  $W'$ .
- (4) Il existe un relevé  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  qui est l'identité au bord.

(5) Soit  $\tilde{H}_k$  le relevé d'une hypersurface  $H_k$  et  $\tilde{H}'_k$  le relevé d'une  $H'_k$  tel que  $\tilde{f}(\tilde{H}_k) = \tilde{H}'_k$ .  $\tilde{M} = A \cup B = A' \cup B'$ , où  $A$  et  $B$  (respectivement  $A'$  et  $B'$ ) sont les 2 composantes connexes de  $\tilde{M} \setminus \tilde{H}_k$  (respectivement de  $\tilde{M} \setminus \tilde{H}'_k$ ) auxquelles on a ajouté  $\tilde{H}_k$  (respectivement  $\tilde{H}'_k$ ).

Soit  $\rho : D_{4i} \subset \text{Iso}(M, h_i) \rightarrow \text{Iso}(M, g_i)$  l'application qui identifie les groupes d'isométries  $D_{4i}$ . Remarquons que  $\forall \gamma \in D_{4i}$ ,  $f \circ \gamma$  et  $\rho(\gamma) \circ f$  sont deux applications harmoniques homotopes. D'après le théorème de Eels-Sampson, elle sont égales. Ceci prouve le premier point. Le second et le troisième point sont alors immédiats car  $f$  envoie l'ensemble des points fixes d'un élément  $\gamma \in D_{4i}$  dans les points fixe de  $\rho(\gamma)$  et réciproquement.

Le quatrième point est juste le fait que comme  $f$  est homotope à l'identité, un relevé de  $f$  coïncide au bord avec un relevé de l'identité. Il suffit alors de prendre le relevé coïncidant avec le relevé qui est l'identité.

Regardons la preuve du dernier point qui est la plus difficile.  $\tilde{H}_k$  est un hyperplan totalement géodésique. L'union des géodésiques orthogonales à  $\tilde{H}_k$  partitionne  $\tilde{M}$ . Soit  $\alpha$  une telle géodésique paramétrée à vitesse constante partant de  $A$  pour aller vers  $B$ . La fonction  $t \mapsto d(\tilde{f}(\alpha(t)), \tilde{H}_k)^2$  est convexe car  $\tilde{f}$  est harmonique et la fonction distance à une sous-variété totalement géodésique est convexe dans une variété à courbure strictement négative (et strictement convexe en dehors de cette sous-variété), d'après le théorème ???. Ainsi  $\tilde{f} \circ \alpha$  ne traverse

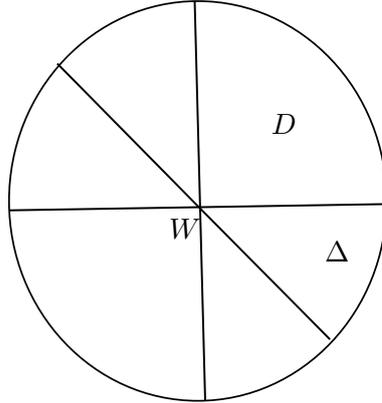


FIGURE 6. Schéma de la variété hybride construite

qu'une fois  $\tilde{H}_k'$ , et comme  $\tilde{f}$  est l'identité au bord  $\tilde{f}(\alpha \cap A) \subset A'$  et  $\tilde{f}(\alpha \cap B) \subset B'$ . Le fait que les géodésiques du type de  $\alpha$  partitionnent  $\tilde{M}$  conclu.

On déduit du dernier point que  $f_*(\pi_1(\Delta)) \subset \pi_1(D)$ , car  $f(\Delta) \subset D$ . En utilisant l'application identité dans l'autre sens, on obtient que  $f_*$  réalise l'isomorphisme de groupe entre  $\pi_1(\Delta)$  et  $\pi_1(D)$ . □

**6.3. Fin de la preuve.** — On va maintenant terminer en prouvant qu'une métrique hyperbolique existe sur  $V_i$  seulement si  $i = 1$ . En effet le théorème de rigidité de Mostow nous assure que  $H$  et  $H'$  sont isométriques. On peut alors coller le long de  $W$   $2i$  exemplaires de  $\Delta$  et 2 exemplaires de  $D$ , selon le motif de la figure 6.3. D'après les conditions sur les angles, on obtient ainsi une variété hyperbolique  $Z$  dont le  $\pi_1$  s'obtient par sommes amalgamées de  $\pi_1(D) = \pi_1(\Delta)$  au dessus des  $\pi_1(\partial D)$ . On va avoir besoin du lemme suivant :

- Proposition 6.9.** — (1)  $\pi_1(Z)$  a un groupe d'automorphisme  $D_{4i}$   
 (2)  $D_{4i}$  agit par isométries sur  $Z$  en fixant  $W$   
 (3) Une rotation d'angle  $\frac{\pi}{i+1}$  envoie  $D$  sur  $\Delta$

*Démonstration.* — Le premier point résulte de la construction de  $Z$

Le théorème de rigidité de Mostow assure le second point.  $W$  est l'ensemble des points fixe du demi-tour involutif et de la réflexion données par la construction de  $Z$ . Ces 2 éléments engendrent  $D_{4i}$ , donc  $\text{Fix}(D_{4i}) = W$ .

Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental d'un secteur  $D$  et  $\Gamma'$  le groupe fondamental d'un secteur  $\Delta$  contigu. Soit  $r$  la rotation qui envoie  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$ . Soit  $\tilde{r}$  un relevé de  $r$  à  $\tilde{V}_i$ . L'holonomie de  $\tilde{r}$  envoie  $\Gamma$  sur  $\Gamma'$ , fixe  $\tilde{W}$ . Ainsi  $\tilde{r}$  envoie un revêtement universel de  $D$  sur un revêtement universel de  $\Delta$ , donc  $r(D) = \Delta$  □

Ainsi  $D$  et  $\Delta$  sont isométriques. L'angle d'incidence de  $D$  étant égal à  $\frac{\pi}{2}$  et celui de  $\Delta$  égal à  $\frac{\pi}{2i}$ , nécessairement  $i = 1$ . Ce qui prouve que pour tout  $i \geq 2$ ,  $V_i$  ne porte pas de structure hyperbolique.

## 7. Deuxième construction de contre-exemples

On part d'une variété hyperbolique compacte et orientable  $X$  de dimension au moins 4 contenant une sous-variété compacte, orientable et totalement géodésique  $V$  de codimension 2 telle que  $[V] \equiv 0$  dans  $H_{n-2}(X, \mathbb{R})$ , comme celles construites précédemment.

On rappelle le théorème suivant, du à H.C. Wang, qui est central dans cette seconde construction :

**Theorème 7.1 (Wang, 1972).** — *Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 4 et  $V$  un réel positif. Alors il n'y a qu'un nombre fini d'orbifolds hyperboliques compacts de dimension  $n$  dont le volume est inférieur à  $V$*

On pourra en trouver une preuve dans [2] par exemple.

### 7.1. Construction d'une famille de revêtements ramifiés. —

**Proposition 7.2.** — *Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe un revêtement ramifié cyclique d'ordre  $i$  au dessus de  $X$ , noté  $X_i$  tel que  $V$  soit le lieu de ramification du revêtement.*

**Remarque.** — Dans le cas particulier où  $V = \partial W$  avec  $W$  une sous-variété de codimension 1, on peut construire ce revêtement en doublant  $W$  le long de  $V$  pour obtenir un espace  $X'$  et en recollant  $i$  copies de  $X'$  le long de  $V$ .

*Démonstration.* — Le théorème de Mostow nous assure que chaque homéomorphisme est homotope à une isométrie. Pour s'assurer que de cela nous fournit bien une action de  $G$  par isométrie il suffit de vérifier que la seule isométrie isotope à l'identité est l'identité elle-même. Si on voit  $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$  où  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^n)$ , cela revient à prouver que si  $f \in \text{textIso}(\mathbb{H}^n)$  commute à tout élément de  $\Gamma$  alors  $f$  est l'identité. □

- On définit de la manière suivante un fibré en droites complexes au dessus de  $V$  :

Le fibré normal à  $V$  est un fibré de rang 2. Munissons le d'une métrique riemannienne quelconque. Les orientations de  $V$  et  $X$  nous permettent d'orienter chaque fibre, et la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens direct définit une structure de fibré en droite complexe sur le fibré normal.

- D'après le théorème du voisinage tubulaire (voir [13]), il existe un voisinage  $U$  de  $V$  dans  $X$  qui est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans l'espace total du fibré normal à  $V$  via  $\varphi : U \rightarrow T_N V$ . On tire maintenant une première fois en arrière le fibré normal sur son espace total via la projection canonique. On a donc un fibré en droites complexes  $L$  au dessus de  $T_N V$ . Ce fibré admet une section naturelle qui est  $s : T_N V \rightarrow L$  qui à un point de  $T_N X$  associe ce même point dans la fibre qui s'identifie naturellement à la fibre de  $T_N V$  à laquelle appartient ce point.

Maintenant on regarde  $\varphi^* L$  au dessus de  $U$  (on identifie maintenant, par abus de notation  $\varphi^* L$  et  $L$ ). Le tiré en arrière de la section  $s$  définie précédemment s'annule exactement sur  $V$  et s'annule transversalement.  $\upharpoonright LU$  est trivial car il admet une section qui ne s'annule pas. On peut donc prolonger  $L$  de manière triviale sur l'extérieur de  $U$  pour obtenir un fibré sur tout  $X$ . La section  $s$  se prolonge à tout  $X$  en une section qui ne s'annule qu'en  $V$ .

La classe de Chern du fibré  $L$  est Poincaré duale au lieu d'annulation d'une section qui s'annule transversalement, ici à  $V$ . Or on a supposé que  $[V] \equiv 0$  donc  $c_1(L) = 0$ . Ceci implique que le

fibré  $L$  est trivial. En utilisant une trivialisaton quelconque  $L \simeq X \times \mathbb{C}$ . On définit

$$X_i = \{(z, v) \in L \times \mathbb{C} \mid (z, v^i) = (z, s(z))\}$$

Le théorème des fonctions implicites nous assure que  $X_i$  est une sous-variété de l'espace total de  $L$ , et la projection restreinte à  $X_i$  est le revêtement ramifié cherché. Le groupe  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$  agit par automorphismes du revêtement.

Le but des sections suivantes est de prouver le théorème suivant :

**Theorème 7.3 (Gromov, Thurston 1987).** — *Pour  $i$  suffisamment grand, la variété  $X_i$  ne porte pas de métrique à courbure sectionnelle  $-1$*

**7.2. Construction d'orbifolds hyperboliques.** — On suppose par l'absurde que les variétés  $X_i$  portent tous une structure hyperbolique. On construit alors une famille infinie d'orbifolds hyperboliques dont le volume est uniformément borné, et deux à deux non isométriques. Ce qui contredit le théorème de Wang, qui assure que le nombre d'orbifolds hyperboliques (en dimension  $n \geq 4$ ) dont le volume est inférieur à une constante est fini. En particulier une nombre fini d' $X_i$  portent une métrique à courbure sectionnelle constante  $-1$

**Lemme 7.4.** — *L'inclusion  $i : V_i \rightarrow X_i$  induit un homomorphisme injectif  $i_* : \pi_1(V_i) \rightarrow \pi_1(X_i)$*

*Démonstration.* — Soit  $\gamma$  un chemin dans  $V_i$ , tel que  $[\gamma]$  est triviale dans  $\pi_1(X_i)$ . En notant  $p_i : X_i \rightarrow X$  la projection canonique, on s'intéresse à  $p_i \circ \gamma$  qui représente 0 dans  $\pi_1(X)$ . Mais comme  $V$  est totalement géodésique dans  $X$ ,  $p_i \circ \gamma$  est trivial dans  $\pi_1(V)$ . Or  $\uparrow p_i V_i$  réalise un homéomorphisme entre  $V_i$  et  $V$ , donc  $\gamma$  représente l'élément neutre dans  $\pi_1(V_i)$ . On a donc montré que  $i_*$  est injectif. □

**Proposition 7.5.** — *L'action par automorphismes de revêtement de  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$  induit une action de  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$  par isométrie laissant fixe une sous-variété  $V'$  de codimension 2 difféomorphe à  $V$*

*Démonstration.* — Soit  $h : X_i \rightarrow X_i$  un générateur de l'action de  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ .  $h$  est homotope à une isométrie  $f$ , d'après le théorème de rigidité de Mostow. De plus un relevé de  $\tilde{h}$  de  $h$  au revêtement universel de  $X_i \simeq \mathbb{H}^n$  est une quasi-isométrie qui coïncide au bord avec un relevé de  $f$ .

Soit  $g_i$  la métrique hyperbolique sur  $X_i$  et  $g'_i$  la métrique à courbure strictement négative construite sur  $X_i$  précédemment. On rappelle que la sous-variété  $V$  est totalement géodésique pour la métrique  $g'_i$ , à courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ . Un relevé de  $Id : (X_i, g'_i) \rightarrow (X_i, g_i)$  à  $\tilde{X}_i$  induit une pseudo-isométrie pour les métriques tirées en arrière. Soit  $\tilde{V}_i$  une composante connexe de  $p^{-1}(V_i)$ . Comme  $i_* : \pi_1(V_i) \rightarrow \pi_1(X_i)$  est injectif,  $\tilde{V}_i$  est difféomorphe au revêtement universel de  $V_i$  et  $V_i \simeq \tilde{V}_i / \text{Stab}(\tilde{V}_i)$ . Ainsi l'inclusion  $\mathbb{H}^{n-2} \rightarrow \mathbb{H}^n$  donnée par la restriction du relevé de  $Id$  à  $\tilde{V}_i$  se prolonge en une injection continue

$$j : \partial_\infty \mathbb{H}^{n-2} \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^n$$

L'image de  $j$  est donc un sous-ensemble de  $S^{n-1}$  homéomorphe à une hypersphère de dimension  $n - 3$ , qui est laissée fixe par  $\tilde{h}$ . Mais  $\tilde{h}$  coïncide avec  $\tilde{f}$  sur  $S^{n-1}$  en particulier l'ensemble de ces points fixes est une hypersphère ronde, de dimension au moins  $n - 3$  car il contient  $j(\partial_\infty \mathbb{H}^{n-2})$  (d'après le théorème d'invariance de la dimension de Brouwer, voire [11]).

Notons  $E$  l'ensemble des points fixes dans  $S^{n-1} \simeq \partial_\infty \mathbb{H}^n$  de  $\tilde{f} \in \text{Conf}(S_{n-1})$ .  $E$  est une hypersphère ronde de dimension  $k \geq n-3$ . Montrons que  $k = n-3$  : en effet si  $k = n-1$  alors  $f = Id$  ce qui contredit le fait que le groupe engendré par  $f$  est  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ . Maintenant si  $k = n-2$ , cela implique que  $\tilde{f}$  fixe un hyperplan géodésique de  $\mathbb{H}^n$ , car toute isométrie qui fixe l'ensemble limite d'un sous ensemble géodésique de dimension au moins 2 fixe totalement le sous-ensemble. Ainsi  $\tilde{f}$  est soit l'identité, soit une réflexion par rapport à l'hyperplan fixé. Le premier cas est exclu car on a supposé que  $\dim(E) = n-2$  et le second cas aussi, car  $\tilde{f}$  préserve l'orientation  $\square$

**Proposition 7.6.** — *Soit  $x$  un point fixe de l'action de  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$  (par isométrie), il existe un ouvert de carte centré en  $x$  stable par l'action de  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ , tel que dans la carte associée, l'action soit linéaire, isométrique pour une métrique euclidienne et que la sous variété  $V'_i$  soit un hyperplan fixé et qu'un générateur de l'action soit la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{i}$  sur le plan orthogonal de cet hyperplan.*

*Démonstration.* — Comme  $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$  agit par isométries, les  $B(x, r)$  (pour la métrique hyperbolique) sont stables par l'action et sont des ouverts de cartes pour  $r$  suffisamment petit. Pour n'importe quelle de ces cartes  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow B(x, r)$  et regardons  $u = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ .  $u$  est une isométrie de la métrique euclidienne  $\sum_{k \leq i} \langle h^k \cdot, h^k \cdot \rangle$  (où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dénote le produit scalaire euclidien) donc  $u$  est linéaire. La fin du lemme résulte de la réduction sous forme normale des éléments de  $O_n(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Proposition 7.7.** — *Les orbifolds  $V_i/(\mathbb{Z}/i\mathbb{Z})$  sont deux à deux non-isométriques*

*Démonstration.* — Autour du lieu de singularité de  $V_i/\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$  l'angle vaut  $\frac{2\pi}{i}$ , et l'angle est préservé par isométrie.  $\square$

### 7.3. Estimations de volume. —

**Proposition 7.8.** — *Il existe une constante  $\kappa$  telle que  $\forall i \in \mathbb{N}$*

$$\text{vol}(X_i) \leq \kappa i$$

*où le volume est calculé pour la métrique hyperbolique hypothétique ou pour la métrique à courbure strictement négative  $g'_i$*

*Démonstration.* — On part d'une triangulation de  $X$ , de telle sorte que  $V$  soit un sous-complexe de dimension  $n-2$  de cette triangulation. Appelons  $m$  le nombre de simplexe de dimension  $n$  de la triangulation. Le tiré en arrière par  $p_i : X_i \rightarrow X$  de cette triangulation est une triangulation de  $X_i$  à  $m \cdot i$  simplexes de dimension  $n$ .

Indexons ces  $m \cdot i$  simplexes notées  $\sigma_k$ . Ces simplexes représentent la classe fondamentale de  $X_i$ . On définit le simplexe  $s(\sigma_k)$  de la façon suivante : on relève  $\sigma_k$  au revêtement universel de  $X_i$  (muni d'une métrique  $h$  à courbure sectionnelle  $\leq -1$ , ce qui est vrai pour les deux métriques considérées précédemment). On remplace alors ce relevé par le simplexe totalement géodésique ayant pour sommet les sommets du relevé de  $\sigma_k$  qu'on projette sur  $X_i$ .  $\sum_k s(\sigma_k)$  représente la classe fondamentale de  $X_i$  car est homotope à  $\sum_k \sigma_k$ . Donc

$$\text{vol}(X_i) = \sum_k \int_{s(\sigma_k)(\Delta)} \Omega$$

où  $\Omega$  est la forme volume de  $X_i$ . Mais comme les relevé des  $s(\sigma_k)$  au revêtement universel de  $X_i$  sont totalement géodésiques et que  $K(h) \leq -1$ ,  $\int_{s(\sigma_k)(\Delta)} \Omega \leq \pi$  donc on obtient

$$\text{vol}(X_i) \leq m\pi i$$

□

**Proposition 7.9.** —

$$\text{vol}(X_i/(\mathbb{Z}/i\mathbb{Z})) = \frac{\text{vol}(X_i)}{i} \leq \kappa$$

*Démonstration.* — En dehors de la sous-variété de codimension 2  $V'_i$ , la projection  $p'_i$  est un revêtement de degré  $i$  entre variétés hyperboliques de volume fini.  $V'_i$  étant de mesure nulle,  $\text{vol}(X_i) = \text{vol}(X_i \setminus V_i)$ . Et donc  $\text{vol}(X_i/(\mathbb{Z}/i\mathbb{Z})) = \frac{\text{vol}(X_i)}{i} \leq \kappa$

□

La preuve du théorème est terminée. En effet on a construit une famille d'orbifolds deux à deux non isométriques, tous de volume inférieur à  $\kappa$ . Ceci contredit le théorème de Wang. Cela montre que seuls un nombre fini de  $X_i$  peuvent porter une structure hyperbolique.

### Références

- [1] Roger C. Alperin. An elementary account of Selberg's lemma. *Enseign. Math. (2)*, 33(3-4) :269–273, 1987.
- [2] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Les groupes hyperboliques de Gromov. [Gromov hyperbolic groups], With an English summary.
- [4] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire*. ENS Éditions, Lyon, 2010.
- [5] James Eells and J. H. Sampson. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, 86(1) :109–160, 1964.
- [6] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [7] Carl Friedrich Gauss. *General investigations of curved surfaces*. Translated from the Latin and German by Adam Hiltebeitel and James Morehead. Raven Press, Hewlett, N.Y., 1965.
- [8] M. Gromov and W. Thurston. Pinching constants for hyperbolic manifolds. *Invent. Math.*, 89(1) :1–12, 1987.
- [9] Uffe Haagerup and Hans J. Munkholm. Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space. *Acta Math.*, 147(1-2) :1–11, 1981.
- [10] Søren Kold Hansen. Measure homology. *Math. Scand.*, 83(2) :205–219, 1998.
- [11] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] Clara Löh. Measure homology and singular homology are isometrically isomorphic. *Math. Z.*, 253(1) :197–218, 2006.
- [13] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
- [14] G. D. Mostow. Quasi-conformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (34) :53–104, 1968.

- [15] Pierre Pansu. Pincement des variétés à courbure négative d'après M. Gromov et W. Thurston. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 4, Année 1985–1986*, pages 101–113. Univ. Grenoble I, Saint, 1986.
- [16] W. Thurston. *The Geometry and Topology of 3-manifolds*. 1978-1979. Notes de cours dispensées à l'université de Princeton.