

Alexander 1920: Toute 3-variété ^{fermée} orientée M^3 ~~admet~~ est un revêtement ramifié sur S^3 , [i.e.

$$\exists f: M \rightarrow S^3 \text{ tq loc } f(z,t) = (z^d, t)$$

Edmonds: $\forall f: M \rightarrow S^3$ de degré ≥ 3 est homotope à un revêtement ramifié.

pour un certain $d \geq 1$.
 $d \in \mathbb{N}$.

Thurston: \exists orbifoldes universels.

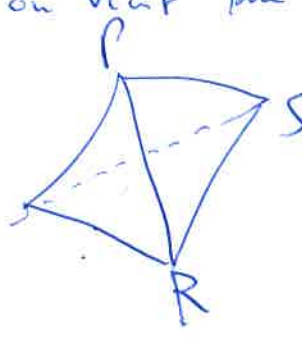
Hilden & Lozano-Montesinos (géométrie de Belgi)



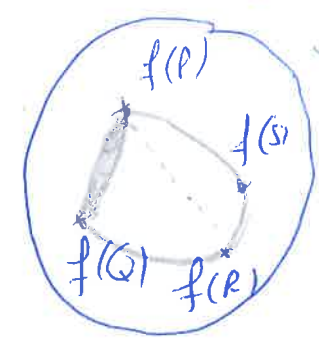
Whitehead link est universel

Dém: On triangule M et on définit f à peu près comme on veut sur le 0-squelette de la triangulation

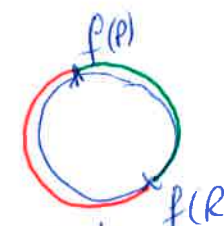
On suppose que $f(P) \neq f(Q)$ $\forall (P,Q)$ arête.



On étend sur les arêtes et sur les faces de façon ~~arbitraire~~ géodésique



A chaque fois on a deux choix possibles: on fait des choix arbitraires sur le 1 et le 2-squelette. Sur le 3-squelette, on fait l'unique choix qui ~~préserve~~ préserve l'orientation.



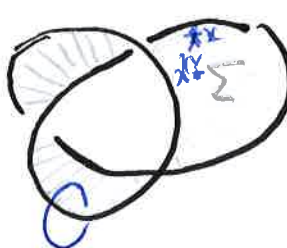
On construit ainsi une application $f: M \rightarrow S^3$ qui a voit chaque tétraèdre sur un tétraèdre sphérique pointé. Cette application est un revêtement ramifié partout sauf éventuellement aux sommets de la triangulation où lesquels f est loc donnée par le cône d'un revêtement ramifié de $S^1 \rightarrow S^2$ [autrement dit le lieu de ramification est le 1-squelette qu'il faut désingulariser]

ici s'arrête l'argument d'Alexander...

Pour cela, on étend à des surfaces locales S^3 autour de des sommets de la triangulation...

Def Une entrelac est une sous-variété de dimension 1 de S^3 . Deux entrelacs E et E' sont équivalents s'il existe une isotopie de S^3 envoyant E en E' .

Proposition: $\forall E$ entrelac de S^3 , $\exists M \rightarrow S^3$ un revêtement double unique qui ramifie sur E .

Démonstration:  Surface de Seifert Σ Δ de la demi-ellipsoïde par variable
 $S^3 \setminus \Sigma_1 \cup S^3 \setminus \Sigma_2$
 $x_1 \in \Sigma_1 \sim x_2 = x'_1 \in \Sigma_2$

Démonstration algébrique: Puisque E est homologiquement trivial, il existe $P: S^3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ tq $P^{-1}(0) = E$ et 0 valeur régulière de P . On définit alors M comme étant la cc variété de Riemann \Rightarrow de la fct \sqrt{P} , i.e. $M := \{(x, y) \in S^3 \times \mathbb{C} \mid y^2 = P(x)\}$.

Unicité Le revêtement ramifié M est déterminé par la représentation de monodromie $m: \pi_1(S^3 \setminus E) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si M et M' sont deux revêtements doubles ramifiés sur E , alors $m = m'$ car $\pi_1(S^3 \setminus E) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ coïncident sur le géométral. Donc $m = m'$ car $H_1(S^3 \setminus E, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Notation: $M := \sqrt{E}$.

$E \in \left\{ \begin{array}{l} \text{entrelacs} \\ \text{de } S^3 \end{array} \right\} / \text{isotopie} \mapsto \sqrt{E} \in \left\{ \begin{array}{l} \text{variétés} \\ \text{orientées} \\ \text{fermées} \\ \text{de dim } 3 \end{array} \right\} / \text{diffé.}$

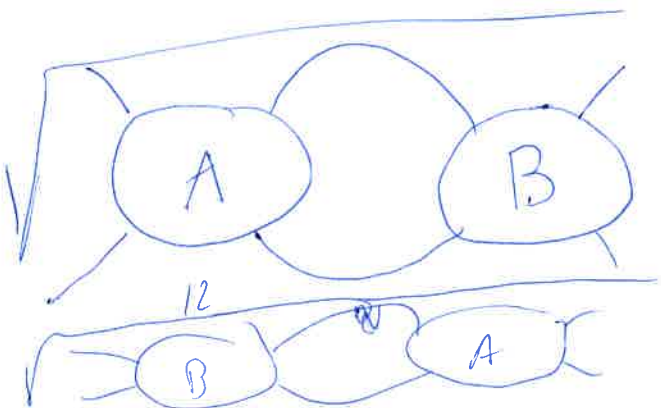
microcosme de Thurston « the mystery of 3-manifolds »
(2010)

Rmq: Dans le cas des surfaces : (1) toute surface orientée fermée est un revêtement ramifié double au sens de la sphère et (2) le lieu de ramification dans la sphère est uniquement déterminé par la topologie de la surface.
En dimension 3, la situation est différente.

Fox: $\Pi^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ n'est pas un revêtement ramifié double de S^3 .
1972

Dém: Si $M \xrightarrow{f} S^3$ est un revêtement ramifié double, on note $i: M \rightarrow S^3$ l'involution qui échange les prismes de f . On voit que $i_*: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^3, \mathbb{Z})$ est égale à $-id$. Si $M \cong S^1 \times S^1 \times S^1$, alors l'action sur $H_3(M, \mathbb{Z})$ serait également donnée par $-id$, mais c'est impossible car i préserve l'orientation.

Montesinos: Non unicité.



A, B
en diviseurs
rationnels

(1939)
Smith conjecture

Soit E entrelacé de S^3 .
Si $\sqrt[d]{E} \cong S^3$, alors
 E est le nœud trivial.

Waldhausen : oui si $d=2$.
(1969)

Morgan-Bass : oui $\forall d$.
(1984)

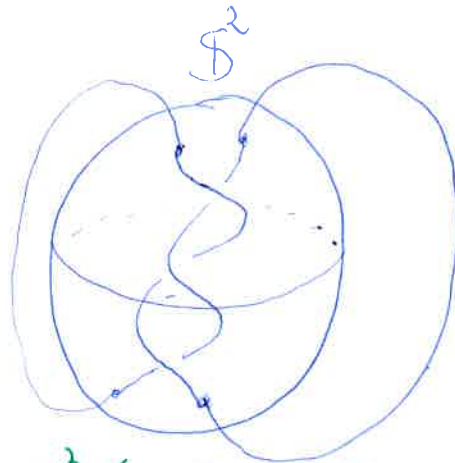
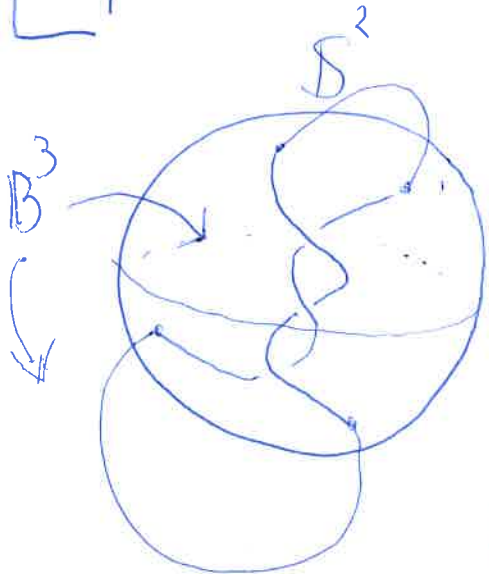
But de l'exposé : trouver un revêtement
double de la sphère dans chacun des huit
géométries de Thurston

S^3 \mathbb{R}^3 \mathbb{H}^3 $S^2 \times \mathbb{R}$ $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Nil
Sol $\widetilde{SL_2 \mathbb{R}}$

Les espaces lenticulaires = $\sqrt{\text{noeuds à deux ponts}}$

géométrie $S^3, S^2 \times \mathbb{R}$

Def Une ~~variété~~ ^{entrelacs} à deux ponts intersecte une sphère plongée $S^2 \hookrightarrow S^3$ en ~~deux~~ quatre points et dans chacune des boules B^3 extérieures à S^2 , l'entrelacs est formé de deux arcs proprement plongés qui sont non enlacés. [un tel revêtement de deux arcs dans B^3 est dit rationnel]



E J. Conway

$$L(p, q) = S^3 / \langle z, w \rangle \sim (e^{2\pi i/p} z, e^{2\pi i/q} w)$$

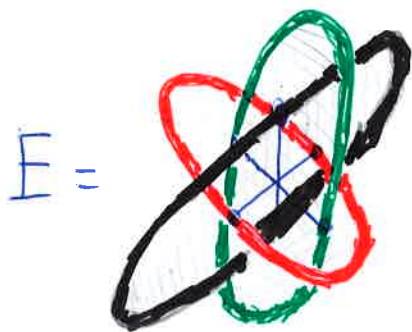
Proposition Les espaces lenticulaires sont ~~les~~ les revêtements ramifiés doubles des noeuds à deux ponts.

Dem: Une variété orientable est un espace lenticulaire

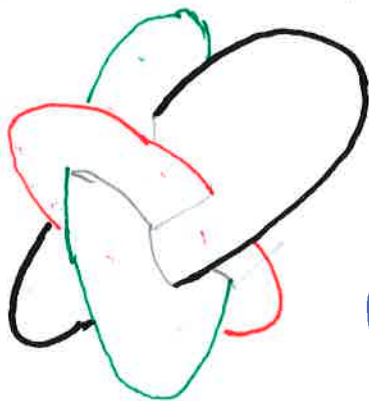
si elle admet un scindement de Heegaard de genre 1.

Si E est un noeud à 2 points, alors \sqrt{E} est l'union des revêtements ramifiés de deux boules de long de deux arcs non enlacés: ces revêtements sont des tores solides

Anneaux borromiens Géométrie \mathbb{R}^3



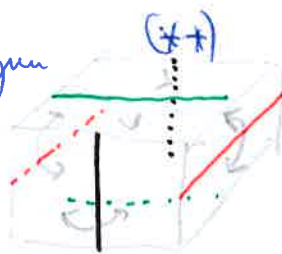
$\sqrt{E} \cong \mathbb{R}^3 / \text{groupe cristallographique}$



L'extérieur de l'union des trois disques elliptiques dans S^3 est homéomorphe à une boule.

(*) Prenons des petits voisinages

de ces disques elliptiques. Le bord de l'union de ces «épaississements» est une sphère ~~à bord~~ à ligne par morceaux. Les morceaux ~~sont des~~ définissent une décomposition polyédrale de la sphère qui admet la même combinatoire que celle d'un cube. Pour bien comprendre la construction, on va dans l'autre sens : on part du cube (***) et on plie ~~ses~~ chacune de ses faces comme sur la figure

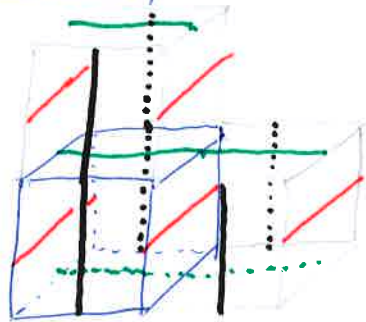


une angle compris le long des arêtes, d'angle π .

L'extérieur des anneaux borromiens admet de cette

façon une ~~structure~~ métrique euclidienne qui admet

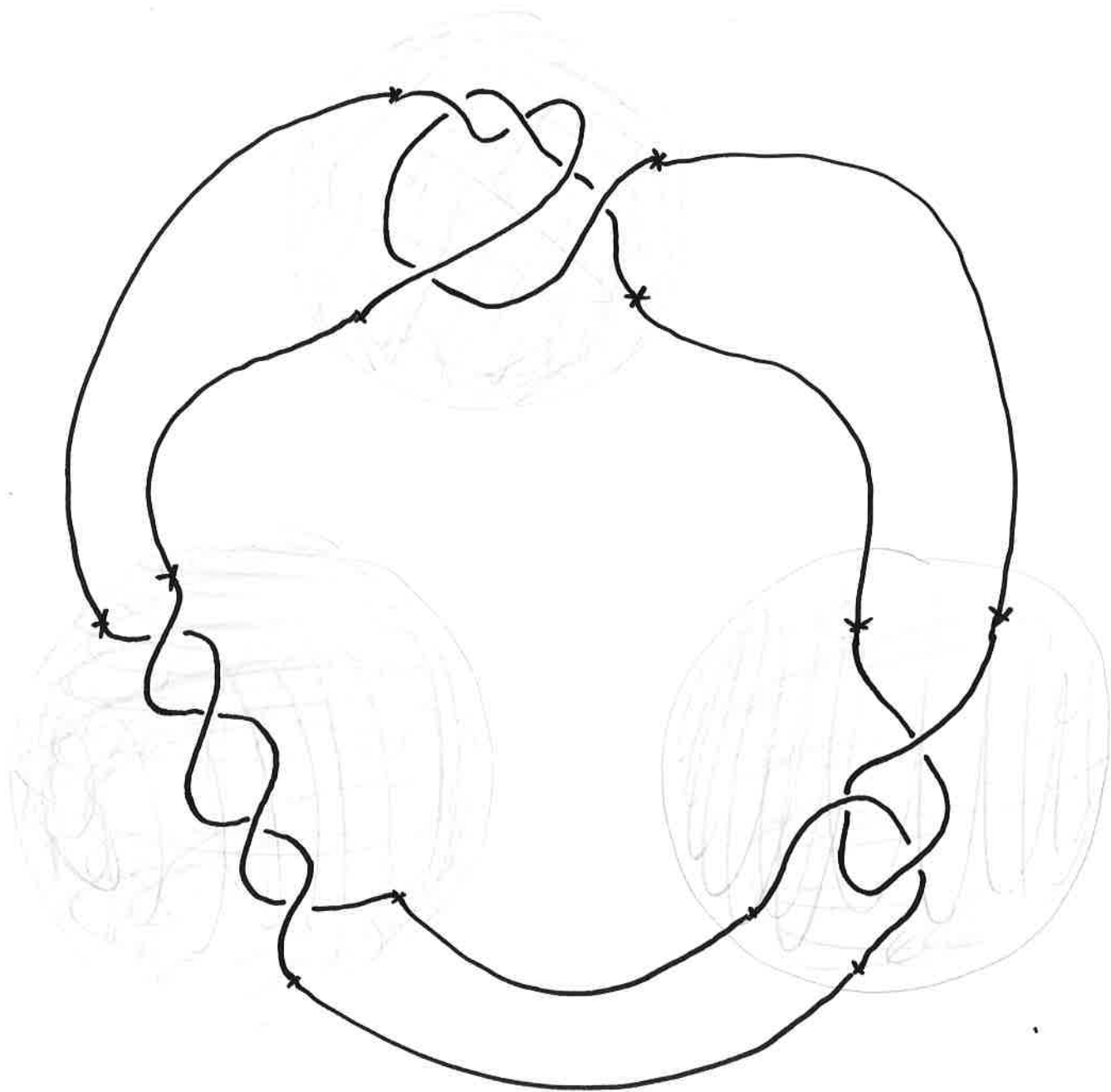
Au revêtement revêtu double \sqrt{E} , cette métrique se
 décompose, pour donner lieu à une métrique plate régulière.
 Par compacité de \sqrt{E} est donc le quotient de \mathbb{R}^3 par
 un groupe cristallographique. On peut être plus précis ici
 et calculer ce dernier; \sqrt{E} est constitué de deux
 cubes fondamentaux, un bleu et un gris comme sur la figure



Pour identifier les cubes gris
 entre eux, il suffit de les
 faire pivoter une fois d'un

angle π le long de l'axe vertical, vertes ou rouges pour
 les appliquer sur un cube bleu, puis recommencer l'opération
 pour les appliquer sur un autre cube gris. Ces opérations
 engendrent le groupe cristallographique de \sqrt{E} .

Elm entrelaç de Montesinos :



Entrelacs de Sekuma (1981)

"Surface bundles over S^1 which are 2-fold branched coverings of S^3 " Math. seminar notes Vol 9 (1981)

Géométrie Sol = $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$
 $t \cdot (u, v) = (e^t u, e^t v)$

Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. On définit \mathbb{T}_A^3 par la formule

$A \curvearrowright \textcircled{0}$
 $\downarrow t \text{ mod } \mathbb{Z}$
 $\textcircled{0} S^1$

$\mathbb{T}_A^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 / \sim$
 (t, x) ~ (t+1, Ax)

fibration en tores sur le cercle

Si A est hyperbolique, i.e. ses valeurs propres sont de module différent de 1, alors \mathbb{T}_A^3 est un quotient de Sol par un réseau.

Involutions de \mathbb{T}_A^3 : on cherche une involution de \mathbb{T}_A^3 dont le quotient sera S^3 . Elle doit préserver l'orientation!

D'autre part, on va la chercher comme dans le cas des anneaux homomorphes, de façon à ce qu'elle reverse le temps et préserve la fibration en tores. Elle sera donc de la forme

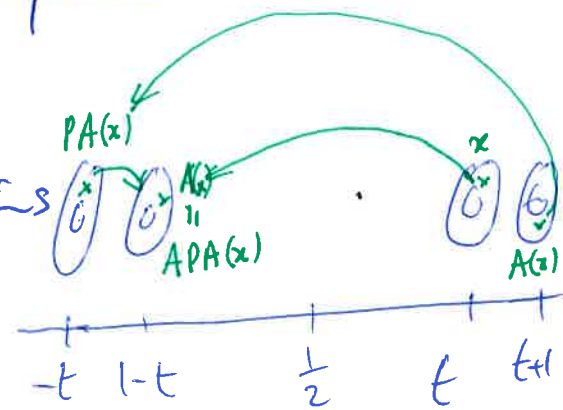
$$i(t, x) = (1-t, P(x))$$

où P est une matrice à coefficients entiers

~~pour~~ involutive, i.e. $P^2 = -I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pour que i soit bien compatible avec

l'identification $(t, x) \sim (t+1, Ax)$, il faut et il suffit que $APA = A$
 i.e. que P conjugue A à son inverse.



Dans ce cas, la revolution i ~~est~~ bien une revolution
 de \mathbb{T}_A^3 dans lui-même, et le quotient \mathbb{T}_A^3 / i
 est alors le quotient de $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{T}^2$ par les identifications

$$(\frac{1}{2}, x) \sim (\frac{1}{2}, P(x))$$

$$(0, x) \sim (0, AP(x))$$

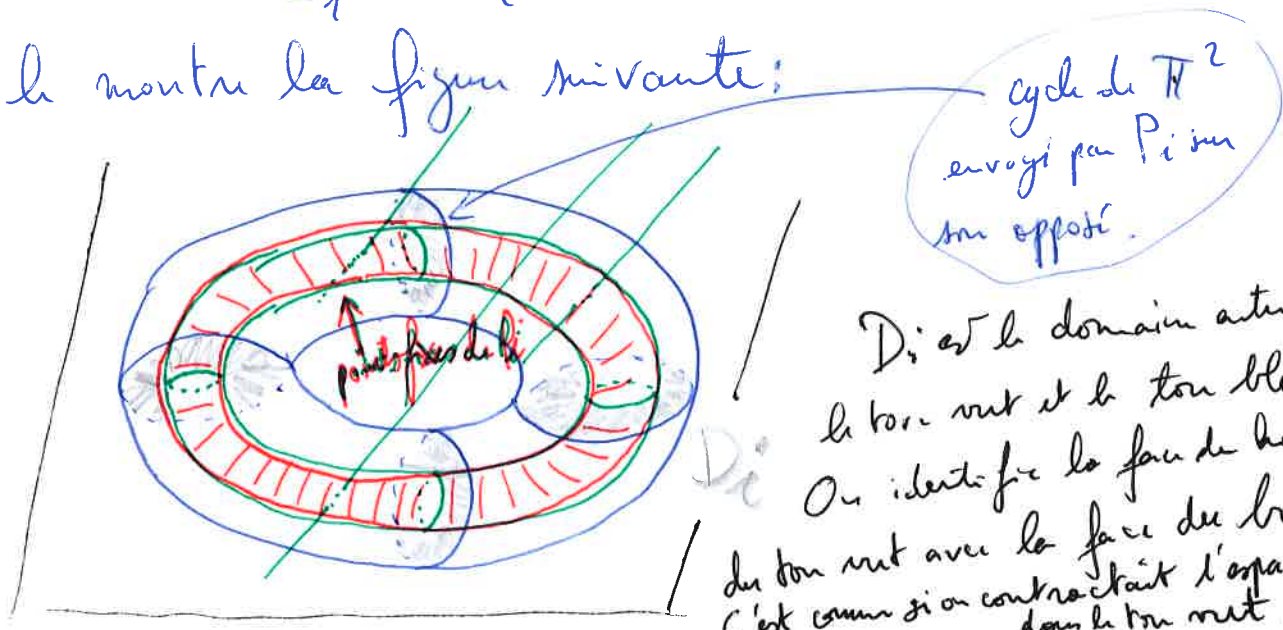
Coupons ce quotient en deux domaines

$$D_1 := [0, \frac{1}{4}] \times \mathbb{T}^2 / (0, x) \sim (0, \overset{P_1}{AP}(x))$$

$$D_2 := [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \mathbb{T}^2 / (\frac{1}{2}, x) \sim (\frac{1}{2}, \overset{P_2}{P}(x))$$

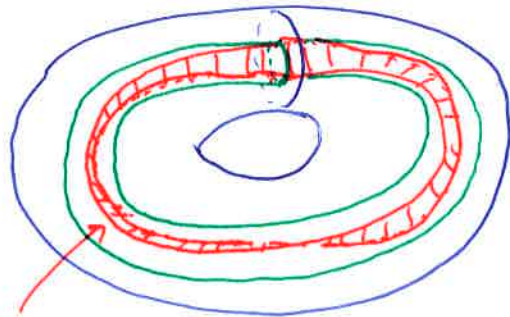
Suivant l'identification $\approx_{\mathbb{Z}} (\frac{1}{4}, x) \in D_1 \sim (\frac{1}{4}, x) \in D_2$.

Les domaines D_1 et D_2 sont des tores solides,
 comme le montre la figure suivante:



D_i est le domaine entre
 le torus vert et le torus bleu.
 On identifie la face de haut
 du torus vert avec la face du bas.
 C'est comme si on contractait l'espace
 dans le torus vert.

Une autre figure possible est :



Courbe des points
fixes de P_i

Dans ce cas on contracte
le tore vers sa surface
rouge

Cela dépend du nombre d'intersection entre une courbe primitive
de $\text{Ker } P_i - I$ et une de $\text{Ker } P_i + I$ est ± 1 ou ± 2 . A chaque
fois on voit que D_i est un tore solide.

On en déduit que \mathbb{T}_A^3 / i est un espace tubulaire car
il admet un sciement de Heegaard de genre 1. Pour qu'il
soit homéomorphe à S^3 , il suffit de vérifier que les cycles
de compression engendrent le groupe fondamental de \mathbb{T}^2 , autrement dit
que

$$\mathbb{Z}^2 = \text{Ker}(P_i + \text{id}) + \text{Ker}(AP + \text{id}).$$

(*)

Des exemples: Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D \in \mathbb{N}$, un corps
 $D \geq 1$

quadratique totalement réel. Son anneau des entiers est

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } D \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}[\sqrt{D}] & \text{si } D \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Le théorème de Dirichlet montre qu'il existe un groupe cyclique infini d'unités $u \in \mathcal{O}_K^*$: ce sont les éléments $u \in \mathcal{O}_K$ tq $u u^\sigma = \pm 1$ où σ désigne l'automorphisme de Galois de K . Prenons une unité tq $u u^\sigma = 1$ ce qu'on

pourra toujours faire grâce à prendre le carré d'une unité quelconque.

L'application $x \in \mathcal{O}_K \mapsto xu \in \mathcal{O}_K$ est \mathbb{Z} -additive,

et elle induit donc une matrice $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ via

l'identification $\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{Z}^2$ comme \mathbb{Z} -module.

Exemples: $a+b\sqrt{D} \leftrightarrow (a, b)$

$D=2$	$u = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$,	$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$D=3$	$u = 2+\sqrt{3}$,	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Observons alors que la conjuguée de m_u par l'automorphisme de Galois σ est égale à $m_{u^\sigma} =: m_{u^{-1}} = (m_u)^{-1}$

$$\sigma m_u \sigma^{-1}(x) = (u x^\sigma)^\sigma = u^\sigma x = m_{u^\sigma}(x) = m_u^{-1}(x)$$

La matrice de σ dans la base $(1, \sqrt{D})$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

[si $D \equiv 2, 3 \pmod{4}$] ce qui se traduit par les équations

$$PAP^{-1} = A^{-1}$$

$$P^2 = \underline{I}$$

qui nous permettent de définir une involution $i(t, x) = (1-t, P(x))$

sur \mathbb{T}_A^3 . Pour les deux exemples cités précédemment

on a

$$D=2, u = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$$

$$\text{Ker}(P+I) = \mathbb{Z}\sqrt{2}, \text{Ker}(P-I) = \mathbb{Z}$$

$$\text{Ker}(PA+I) = \mathbb{Z}(1+\sqrt{2}), \text{Ker}(PA-I) = \mathbb{Z}(2+\sqrt{2})$$

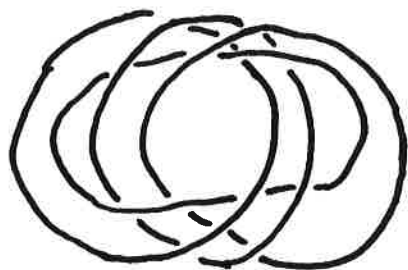
$$D=3, u = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{Ker}(P+I) = \mathbb{Z}\sqrt{3}, \text{Ker}(P-I) = \mathbb{Z}$$

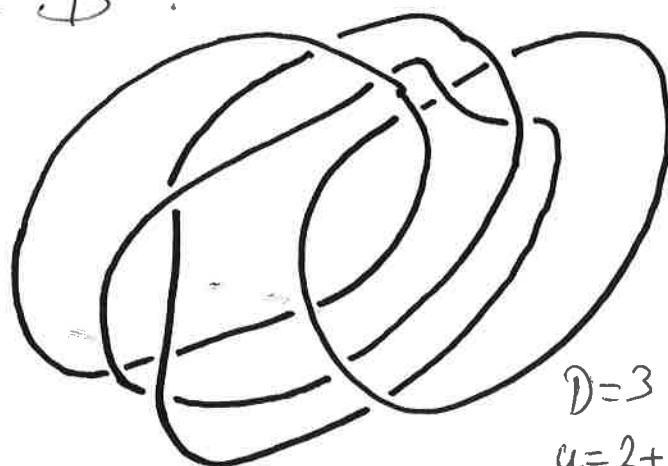
$$\text{Ker}(PA+I) = \mathbb{Z}(1-\sqrt{3}), \text{Ker}(PA-I) = \mathbb{Z}(-3+\sqrt{3})$$

Dans les deux cas l'équation (*) est satisfaite et on

a bien que $\mathbb{T}_A^3 / i \simeq \mathbb{S}^3$.



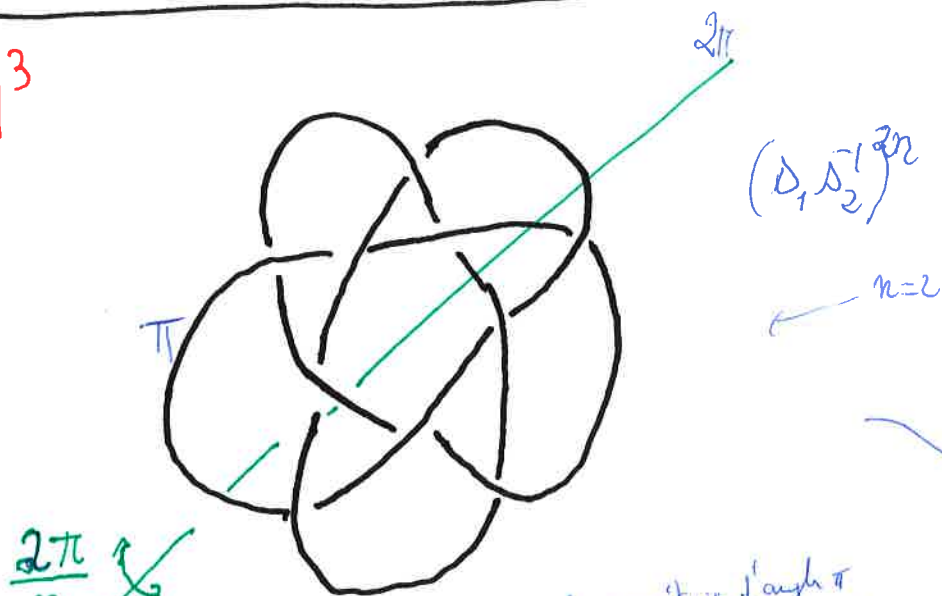
$$D=2 \quad u=3+2\sqrt{2}$$



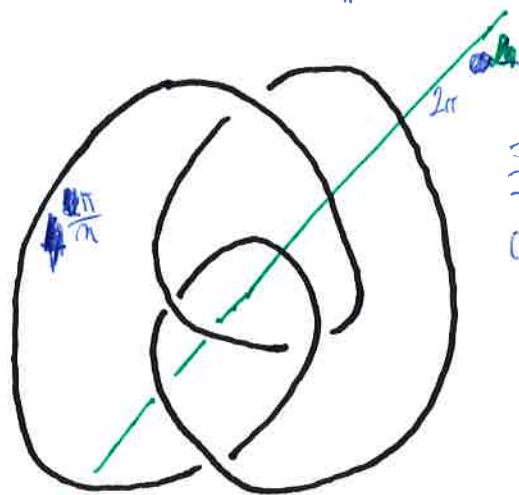
$$D=3 \\ u=2+\sqrt{3}$$

Le noeud « tête de turc » (5,3)

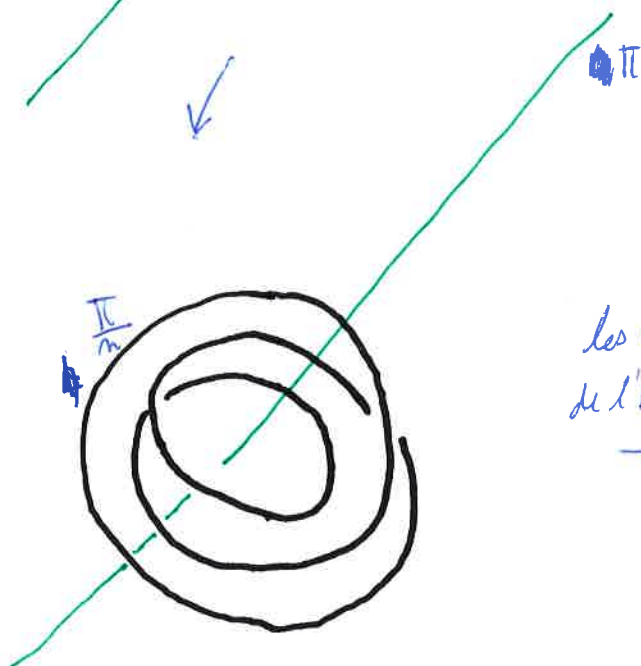
Géométrie \mathbb{H}^3



↙ quotient par la symétrie d'angle π autour de la droite verte.



∃ structure hyperbolique conique avec un angle $\frac{2\pi}{n}$ le long du noeud de huit.



les composantes de l'entrelacs sont échangeables
→

