Feuille d'exercices 1: Groupes et algèbres de Lie

March 4, 2019

Exercice 1 (Revêtements d'un groupe de Lie)**.** Soit G un groupe de Lie connexe et $\tilde{G}$ son revêtement universel.

1- Montrer qu'il existe une unique structure de groupe de Lie sur $\tilde{G}$ telle que la projection $p : \tilde{G} \to G$ est un morphisme de groupes.

2- Montrer que le groupe fondamental de G est isomorphe à $p^{-1}(\mathbf{1}_G)$.

3- Montrer que $p^{-1}(G)$ est central dans $\tilde{G}$.

Exercice 2 (Algèbre de Lie de sous-groupes immergés)**.** Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H un sous-groupe (non nécessairement fermé) de G. On définit

$$\mathrm{Lie}(H) = \{u \in \mathbf{1}_G \mid \exists \gamma : \mathbb{R} \to H \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \gamma(0) = \mathbf{1}_G, \gamma'(0) = u\} \ .$$

1- Montrer que $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.

2- Montrer que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

3- Montrer que si H est normal dans G, alors $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de G.

4- Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$. (On pourra considérer la distribution $E \subset TG$ invariante par multiplication à gauche et telle que $E_{\mathbf{1}_G} = \mathfrak{h}$.)

5- On suppose G connexe. Montrer que si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors il existe un sous-groupe normal H de G tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$.

6- Soit G un groupe de Lie connexe. Montrer que G est simple si et seulement si $\mathfrak{g}$ est simple et $Z(G) = \{\mathbf{1}_G\}$ (où $Z(G)$ désigne le centre de G).

Exercice 3 (Groupes et algèbres de Lie résolubles)**.** Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $D(\mathfrak{g})$ le sous-espace engendré par les $[u,v], u,v \in \mathfrak{g}$.

1- Montrer que $D(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[u,v] = 0$ pour tous u,v).

2- On suppose G simplement connexe. Montrer que $D(G)$ est fermé dans G et que $\mathrm{Lie}(D(G)) = D(\mathfrak{g})$.

On définit par récurrence $D^i(\mathfrak{g}) = D(D^{i-1}(\mathfrak{g}))$ (et $D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$). On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe $i \geq 0$ tel que $D^i(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

3- Montrer que G est résoluble si et seulement si $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Exercice 4 (Théorème d'Engel)**.** On considère la propriété P_n : "pour tout espace vectoriel V et toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathrm{End}(V)$, si tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont nilpotents, alors il existe $v \in V \backslash \{0\}$ tel que $Av = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$". On veut montrer cette propriété par récurrence sur n.

1- Montrer que P_1 est vraie.

On suppose maintenant P_k vraie pour $k \leq n-1$. Soit V un espace vectoriel, $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ de dimension n et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie stricte de $\mathfrak{g}$.

2- Montrer qu'il existe $A \in \mathfrak{g} \backslash \mathfrak{h}$ tel que $[A, B] \in \mathfrak{h}$ pour tout $B \in \mathfrak{h}$.

3- Montrer que $\ker \mathfrak{h} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid Bv = 0 \text{ for all } B \in \mathfrak{h}\}$ est invariant par $\mathfrak{h}$.

4- Conclure que $\ker \mathfrak{g}$ contient un vecteur non-nul. (Indication: on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{h}$.)

5- Soit V un espace vectoriel de dimension $k < +\infty$ et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ dont tous les éléments sont nilpotents. Montrer qu'il existe un drapeau complet $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{k-1} \subset F_k = V$, $\dim(F_i) = i$ dans V tel que $A(F_i) \subset F_{i-1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et tout $A \in \mathfrak{g}$.

Exercice 5 (Critère de résolubilité de Cartan)**.** Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. Pour $A \in \mathrm{End}(V)$, on note

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}_A : & \mathrm{End}(V) & \to & \mathrm{End}(V) \\ & B & \mapsto & AB - BA \end{array} .$$

1- Soit S un endomorphisme diagonalisable de V. Montrer que ad_S est diagonalisable. Quels sont les espaces propres et les valeurs propres de ad_S ?

2- Soit N un endomorphisme nilpotent de V. Montrer que ad_N est nilpotent.

3- Soit A un endomorphisme de V. Montrer qu'il existe S diagonalisable et N nilpotent tels que S et N commutent et $A = S + N$. Montrer que cette décomposition est unique.

4- On note $\bar{S}$ l'endomorphisme diagonalisable de V qui a les mêmes espaces propres que S et dont les valeurs propres sont complexes conjuguées à celles de S. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ divisible par X (dépendant de A) tel que

$$\mathrm{ad}_{\bar{S}} = P(\mathrm{ad}_A) .$$

5- Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ telle que $\mathrm{Tr}(AB) = 0$ pour tout $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et tout $B \in \mathfrak{g}$. Montrer que tout $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent. (Indication: montrer que $\mathrm{Tr}(A\bar{S}) = 0$.)

6- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing.

Exercice 6 (Critère de semi-simplicité de Cartan)**.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Le but de cet exercice est de démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal résoluble non trivial,
- la forme de Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ est non-dégénérée,
- $\mathfrak{g}$ se décompose en un produit d'algèbres simples.

Ces trois propriétés caractérisent donc les algèbres de Lie semi-simples.

Si V est un sous-esapce vectoriel de $\mathfrak{g}$, on note $V^{\perp} = \{u \in \mathfrak{g} \mid \kappa_{\mathfrak{g}}(u, v) = 0 \text{ forall } v \in V\}$ son orthogonal pour la forme de Killing.

1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{i}$ un idéal le $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{i}^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.
2. Montrer que $\kappa_{\mathfrak{i}} = \kappa_{\mathfrak{g}|\mathfrak{i}}$.
3. On suppose que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal résoluble. Montrer que pour tout idéal de $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}^{\perp} = \mathfrak{g}$.
4. En déduire que $\mathfrak{g}$ est une somme directe d'algèbres de Lie simples.
5. Soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ une somme directe d'algèbres simples. Montrer que chaque $\kappa_{\mathfrak{g}_i}$ est non-dégénérée. En déduire que $\kappa_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée.
6. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\kappa_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée. Montrer que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal abélien. En déduire que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal résoluble.