Fibrés de Higgs et représentations de groupes de surfaces

March 16, 2022

Introduction

Soit X une surface de Riemann compacte. L'objet de ce cours est de présenter la *correspondance de Hodge non-abélienne* (abrégée par la suite en *correspondance HNA*), qui fait correspondre à tout fibré vectoriel complexe plat de rang r sur X à monodromie semisimple un *fibré de Higgs polystable* de rang r et degré 0.

Cette correspondance a plusieurs aspects remarquables:

1. La correspondance relie des objets de nature purement topologique à des objets de nature holomorphe, (donc algébrique d'après le théorème GAGA de Serre).

   En effet, les fibrés plats s'identifient, via la correspondance de Riemann–Hilbert, aux classes de conjugaisons de représentations linéaires du groupe fondamental de X. De l'autre côté, les fibrés de Higgs sont des paires $(\mathcal{E}, \Phi)$ où $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe sur X et Φ une 1-forme holomorphe à valeurs dans les endomorphismes de $\mathcal{E}$. Ils appartiennent donc au monde de la géométrie analytique/algébrique complexe.

2. La correspondance est "parfaite": nous verrons que c'est un *isomorphisme de catégories* qui commute aux opérations naturelles (dual, somme directe, produit tensoriel...). De plus, elle induit une bijection analytique réelle entre, d'un côté, la *variété des caractères* $\mathrm{Rep}(X, \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}))$ de $\pi_1(X)$ dans $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, et de l'autre, l'*espace des modules* $\mathcal{M}(r, 0)$ des fibrés de Higgs polystables de rang r et degré 0.

3. La correspondance est hautement non-triviale: dans les deux directions, elle repose sur la résolution d'une EDP elliptique sur l'espace des métriques hermitiennes sur le fibré. Le sens $\longrightarrow$ est dû à Donaldson dans le cas de rang 2 et à Corlette dans le cas général, tandis que le sens $\longleftarrow$ est dû à Hitchin dans le cas de rang 2 et Simpson dans le cas général.[1]

4. La correpondance est "transcendante": du côté gauche, la variété des caractères $\mathrm{Rep}(X, \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}))$ est une variété algébrique affine complexe

[1]Plusieurs auteurs nomment d'ailleurs cette correspondance par le choix variable de deux noms parmi ces 4. Le terme de "correspondance de Hodge non-Abelienne", qui peut être discuté, a l'avantage d'éviter un choix arbitraire.

qui possède, sur son lieu lisse, une structure symplectique holomorphe. En outre toute cette structure ne dépend que de la topologie de X. Du côté droit, l'espace des modules $\mathcal{M}(r,0)$ est une variété projective au dessus d'un espace vectoriel complexe de dimension moitié, qui dépend de la structure de surface de Riemann de X. La correspondance n'est pas compatible avec les structures analytiques complexes d'une façon remarquable: mises ensemble, les structures de $\mathrm{Rep}(X, \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}))$ et $\mathcal{M}(r,0)$ forment une *structure hyperkählérienne*.

La correspondance HNA admet de nombreuses généralisations:

- Simpson, en s'appuyant notamment sur les travaux de Siu, a étendu la correspondance au cas où X est une variété kählérienne compacte. Toutefois, les fibrés de Higgs de classes de Chern nulles sont des objets beaucoup plus rigides en dimension supérieure, et la correspondance n'a pour l'instant pas permis de décrire les variétés de caractères de groupes de kähler aussi précisément que pour les groupes de surfaces.

- Simpson a aussi établi une *correspondance HNA parabolique*, qui fait correspondre aux connexions méromorphes à pôles simples sur une surface de Riemann des fibrés de Higgs dont le champ de Higgs est méromorphe à pôles simples. Cette correspondance permet de décrire les variétés de caractères relatives du groupe fondamental d'une surface de Riemann épointée.

- la correspondance HNA parabolique a été étendue en dimension supérieure: Biquard a établi la correspondance lorsque X est le complémentaire d'un diviseur lisse dans une variété kählérienne compacte, et T. Mochizuki l'a généralisée à toute variété quasi-projective.

- Enfin, Biquard et Boalch ont établi une correspondance HNA "sauvage", entre connexions méromorphes à pôles d'ordre supérieur et fibrés de Higgs à pôles d'ordre supérieur (sur une surface de Riemann).

Ici, nous nous contenterons cependant du cas (le plus simple, mais aussi le plus riche) d'une surface de Riemann compacte.

Le plan du cours est le suivant:

- Dans le chapitre 1, nous introduirons les objets mis en jeu dans la correspondance. Ce sera l'occasion de quelques rappels sur les surfaces de Riemann et les fibrés à connexions.

- Dans le chapitre 2, nous établirons la correspondance et les deux théorèmes d'analyse géométrique sur lesquels elle repose. Nous passerons vite sur la construction des espaces de modules $\mathrm{Rep}(X, \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}))$ et $\mathcal{M}(r,0)$, ces espaces faisant l'objets d'une étude plus approfondie dans les cours parallèles d'Emmanuel Letellier et François Loeser.

- Dans le chapitre 3, nous expliquerons que la correspondance identifie la variété des caractères à valeurs dans un sous-groupe algébrique réel de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ à une sous-variété algébrique *complexe* de $\mathcal{M}(r, 0)$. Nous arriverons ainsi à l'un des premiers grands succès de HNA: la description topologique de la variété des caractères $\mathrm{Rep}(X, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$.

- Dans le chapitre 4, suivant le temps qu'il nous restera, nous traiterons d'un sujet au choix parmi les suivants:
  - La structure hyper-kählérienne de $\mathcal{M}(r, 0)$
  - Les variations de structures de Hodge comme exemples de fibrés de Higgs
  - Le comportement de la correspondance par déformation de la structure complexe sur X.

Chapter 1

Fibrés et connexions sur les surfaces de Riemann

1.1 Surfaces de Riemann

1.1.1 Définitions

On peut donner trois définitions différentes des surfaces de Riemann: comme variété différentielle complexe compacte de dimension 1, comme courbe projective complexe lisse, ou comme surface compacte réelle orientée munie d'une structure conforme. L'omniprésence des surfaces de Riemann et la richesse de leur étude provient de l'équivalence entre ces trois définitions.

Courbes différentielles complexes de dimension 1 Pour rester rigoureux, nous partons ici de la définition suivante:

Définition 1.1.1. Une surface de Riemann compacte est un espace topologique compact connexe muni d'un atlas de cartes locales à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont les changements de cartes sont holomorphes.

Notez que l'hypothèse de connexité n'est absolument pas canonique. Je la met ici pour éviter qu'on me reproche plus tard d'oublier cette hypothèse.

Courbes algébriques lisses Il est clair que les points complexes d'une courbe projective lisse connexe définie sur $\mathbb{C}$ forment une surface de Riemann compacte. La réciproque, en revanche, est loin d'être triviale. Elle a été démontrée par Riemann:

Théorème 1.1.2 (Riemann)**.** *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors X est biholomorphe à l'analytification d'une courbe algébrique lisse sur $\mathbb{C}$.*

Surfaces conformes Soit S une variété différentielle réelle compacte et connexe de dimension 2.

Définition 1.1.3. Une *structure presque complexe* J sur S est un champ lisse d'endomorphismes de l'espace tangent TS tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Une structure presque complexe J permet de munir S de l'orientation telle que (u, Ju) est positivement orienté pour tout $u \in TS$ non nul.

Il existe toujours des métriques riemanniennes lisses sur S invariantes par l'action de J (il suffit de moyenner une métrique quelconque sous l'action du groupe fini engendré par J). De plus, Si g et g' sont deux telles métriques, on vérifie aisément que g et g' diffèrent d'un facteur conforme, i.e. il existe $\sigma : S \to \mathbb{R}$ lisse telle que $g' = e^\sigma g$. [1] Ainsi, toute structure complexe J sur S définit une *structure conforme* sur S au sens suivant:

Définition 1.1.4. Une *structure conforme* sur S est une classe d'équivalence de métriques riemanniennes pour la relation d'équivalence conforme:

$$g \sim g' \Leftrightarrow \exists \sigma \mid g' = e^\sigma g \ .$$

Réciproquement, si S est une surface orientée et $[g]$ une structure conforme sur S, is existe une unique structure presque complexe J préservant S et telle que (u, Ju) est positivement orienté pour tout $u \in TS$ non nul.

Soit maintenant X une surface de Riemann. En oubliant l'holomorphie des changements de cartes, on peut voir X comme une surface réelle. Mais les cartes locales à valeurs dans $\mathbb{C}$ identifie le fibré tangent à X à un espace vectoriel complexe de dimension 1, et munissent donc TX d'une structure presque complexe. Réciproquement, toute structure presque complexe (et donc toute structure conforme sur une surface orientée) provient d'une structure de surface de Riemann: c'est l'objet du théorème des coordonnées isothermes de Gauss.

Théorème 1.1.5 (Gauss). *Soit S une surface réelle compacte et J une structure presque complexe sur S. Alors il existe des cartes locales $\varphi : U \subset S \to \mathbb{C}$ dont la différentielle vérifie*

$$\mathrm{d}\varphi(Ju) = i\mathrm{d}\varphi(u) \ .$$

Les changements de cartes sont alors holomorphes.

1.1.2 Classification topologique et uniformisation

Rappelons d'abord la classification topologique des surfaces:

[1] Montrer que $g(u, Ju) = 0$ pour tout u et que cette relation caractérise g point par point à un scalaire près.

Théorème 1.1.6. *Toute surface compacte orientable est difféomorphe à une sphère à laquelle on ajoute un certain nombre d'anses. Le nombre d'anses s'appelle le* genre *de la surface.*

Le genre d'une surface de Riemann compacte a une interprétation holomorphe: c'est la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes globales sur la surface.

genre 0. La surface de genre 0 est la sphère.

La seule surface de Riemann de genre 0 est la droite projective complexe, aussi appelée *sphère de Riemann.*

genre 1. La surface de genre 1 est le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Les surfaces de Riemann de genre 1 sont les *courbes elliptiques.*

D'après le théorème d'uniformisation de Jacobi–Weierstrass, toute courbe elliptique X est biholomorphe au quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau.

On peut toujours se ramener à écrire $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, où τ appartient au demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{z \mid \mathfrak{im}(z) > 0\} > 0.$$

De plus un tel τ est unique modulo l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ par homographies. Il existe donc une famille à un paramètre complexe de courbes elliptiques. Plus précisément, l'*espace des modules* des courbes elliptiques est la *courbe modulaire*

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \ .$$

genre $g \geq 2$. La surface compacte orientable S_g de genre g est la somme connexe de g tores. On peut aussi la voir comme recollement d'un polygone à $4g$ côtés. Son revêtement universel est un disque et son groupe fondamental admet la présentation suivante:

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = \mathrm{Id}\rangle \ ,$$

où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ est le commutateur de a_i et b_i.

D'après le théorème d'uniformisation de Klein–Poincaré, toute surface de Riemann X de genre $g \geq 2$ est biholomorphe à un quotient du demi-plan de Poincaré.

On peut donc écrire

$$X = j(\pi_1(X))\backslash\mathbb{H}$$

où $j : \pi_1(X) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est une représentation *fuchsienne*, i.e. fidèle et discrète. Cette représentation est unique modulo conjugaison par un élément de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ et précomposition par un automorphisme de $\pi_1(X)$.

L'ensemble des représentations fuchsiennes modulo conjugaison dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ est parfois appelé *espace de Teichmüller* $\mathcal{T}(S_g)$. Klein et Poincaré savaient déjà qu'il forme une composante connexe de l'espace de la variété des caractères dans $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, de dimension réelle $6g-6$. Le groupe des automorphismes extérieurs de $\pi_1(S_g)$, aussi appelé *Mapping Class Group* (groupe modulaire) de S_g et noté MCG_g, agit proprement discontinûment sur $\mathcal{T}(S_g)$. Le quotient

$$\mathcal{M}_g = \mathrm{MCG}_g \backslash \mathcal{T}(S_g)$$

est l'*l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre* g, qui peut être construit de façon purement algébrique. C'est une variété quasi-projective de dimension complexe $3g-3$.

1.2 Fibrés vectoriels, fibrés holomorphes, fibrés plats

1.2.1 Fibrés vectoriels et leurs faisceaux de sections

Commençons par présenter parallèlement les fibrés vectoriels (lisses), les fibrés holomorphes et les fibrés plats.

Définition 1.2.1. Un fibré vectoriel (complexe, lisse) de rang r sur une variété différentielle réelle X est une variété différentielle E muni d'une submersion $\pi : E \to X$ et de cartes locales

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$$

telles que les changements de cartes sont de la forme

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (x,v) \to (x, g_{U,V}(x)v)$$

où $g_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ est une application $\mathcal{C}^\infty$.

Les cartes locales munissent les fibres de π d'une structure d'espace vectoriel, qui est bien définie puisque les changements de cartes sont linéaires dans les fibres. Informellement, un fibré vectoriel sur X est donc une famille lisse et localement triviale d'espaces vectoriels paramétrée par X. De même, un fibré holomorphe est une famille *holomorphe* paramétrée par une variété différentielle complexe.

Définition 1.2.2. Un fibré holomorphe de rang r sur une variété différentielle complexe X est une variété complexe $\mathcal{E}$ muni d'une submersion holomorphe $\pi : \mathcal{E} \to X$ et de cartes locales holomorphes

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$$

telles que les changements de cartes sont de la forme

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (x,v) \to (x, g_{U,V}(x)v)$$

où $g_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ est une application holomorphe.

Enfin, on définit un *fibré plat* comme un fibré vectoriels muni de cartes locales dont les changements de cartes sont localement constants.

Définition 1.2.3. Un fibré plat de rang r sur une variété différentielle réelle X est une variété différentielle $\mathbf{E}$ muni d'une submersion $\pi : \mathbf{E} \to X$ et de cartes locales

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$$

telles que les changements de cartes sont de la forme

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (x, v) \to (x, g_{U,V} v)$$

où $g_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ est localement constante.

Comme une application localement constante et une application holomorphe sont en particulier des applications lisses, il est clair qu'un fibré plat et un fibré holomorphe sont en particulier des fibrés vectoriels. On notera systématiquement les fibrés plats en lettres grasses ($\mathbf{E}$, $\mathbf{F}\ldots$), les fibrés holomorphes en lettres cursives ($\mathcal{E}, \mathcal{F}\ldots$) et le fibré vectoriel sous-jacent par la même lettre en police standard ($E, F\ldots$).

Les sections (lisses) d'un fibré vectoriel E de rang r forment un faisceau noté $\mathcal{C}^\infty(E)$ (qui à un ouvert U associe l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(U, E)$ des sections lisses au dessus de U). Notons $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ le faisceau des fonctions lisses de X dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2.4. *Le faisceau $\mathcal{C}^\infty(E)$ est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$-modules localement libre de rang r. Inversement, tout faisceau de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$-modules localement libre de rang r s'identifie au faisceau des sections d'un fibré vectoriel de rang r.*

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un fibré holomorphe de rang r sur une variété différentielle complexe X. Les sections holomorphes de $\mathcal{E}$ forment un faisceau noté $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ (qui à un ouvert U associe l'espace vectoriel $\mathcal{O}(U, \mathcal{E})$ des sections holomorphes au dessus de U). Notons $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ le faisceau des fonctions holomorphes de X dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2.5. *Le faisceau $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ est un faisceau de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-modules localement libre de rang r. Inversement, tout faisceau de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-modules localement libre de rang r s'identifie au faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe de rang r.*

Enfin, si $\mathbf{E}$ est un fibré plat sur une variété différentielle X, on peut définir le faisceau des *sections plates* de $\mathbf{E}$, c'est-à-dire les sections qui sont constantes dans les cartes locales. On le notera $S(\mathbf{E})$.

Proposition 1.2.6. *Le faisceau $S(\mathbf{E})$ est un* système local de rang r, *i.e. un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels localement libre de rang r. Inversement, tout système local de rang r s'identifie au faisceau des sections plates d'un fibré plat de rang r.*

On note abusivement $\mathbb{C}$ le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a des inclusions de faisceaux $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, qui permettent d'interpréter le faisceau des sections du fibré vectoriel sous-jacent à un fibré holomorphe ou un fibré plat comme une extension des scalaires:

Proposition 1.2.7. *Soit $\mathbf{E}$ un fibré plat. Alors*

$$\mathcal{C}^\infty(E) = S(\mathbf{E}) \underset{C}{\otimes} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}) \ .$$

Proposition 1.2.8. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré holomorphe. Alors*

$$\mathcal{C}^\infty(E) = \mathcal{O}(\mathcal{E}) \underset{\mathcal{O}(\mathbb{C})}{\otimes} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}) \ .$$

1.2.2 Fibrés et faisceaux usuels

Soit X une variété différentielle réelle. On note TX son fibré tangent et $T^\vee X$ son fibré cotangent. Ce sont des fibrés vectoriels *réels*. Leurs complexifiés $T_\mathbb{C}X = TX \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ et $T^\vee_\mathbb{C}X = T^\vee X \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ sont des fibrés vectoriels complexes. On a un isomorphisme canonique

$$T^\vee_\mathbb{C} X = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(TX, X \times \mathbb{C})$$

où $X \times \mathbb{C}$ désigne le fibré trivial de rang 1 sur X.

On note $\Lambda^k T^\vee_\mathbb{C} X$ la k-ième puissance extérieure du cotangent complexe. C'est un fibré vectoriel complexe dont les sections sont les k-formes à valeurs complexes. On notera

$$\mathcal{A}^k(\mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty \Lambda^k T^\vee_\mathbb{C} X$$

le faisceau des k-formes.[2]

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel, on notera

$$\mathcal{A}^k(E) = \mathcal{C}^\infty(\Lambda^k T^\vee_\mathbb{C} X \otimes_\mathbb{C} E) = \mathcal{A}^k(\mathbb{C}) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})} \mathcal{C}^\infty(E)$$

le faisceau des k-formes à valeurs dans E. Concrètement, une k-forme à valeurs dans E associe à tout point x une application multiliénaire alternée de $(T^\vee_x X)^k$ dans E_x.

[2] Suivant S. Kobayashi ou Claire Voisin, on priviliégie cette notation à la notation $\Omega^k(\mathbb{C})$ qui désignera le faisceau des formes holomorphes.

Supposons maintenant que X est une variété différentielle complexe. On note toujours par TX et $T^\vee X$ le tangent *réel.* La structure de variété complexe définit en particulier une *structure presque complexe* J, c'est-à-un endomorphisme $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(TX)$ tel que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TX}$.

L'action J induite sur $T_{\mathbb{C}}X$ et $T^\vee_{\mathbb{C}}X$ se diagonalise avec valeurs propres i et $-i$ et fournit donc des décompositions

$$T_{\mathbb{C}}X = T_{1,0}X \oplus T_{0,1}X \ ,$$

$$T^\vee_C X = T^\vee_{1,0}X \oplus T^\vee_{0,1}X \ .$$

Concrètement, on a

$$T^\vee_{1,0}X = \{\alpha \in T^\vee_{\mathbb{C}}X \mid \alpha(Ju) = i\alpha(u)\} \ ,$$

$$T^\vee_{0,1}X = \{\alpha \in T^\vee_{\mathbb{C}}X \mid \alpha(Ju) = -i\alpha(u)\} \ .$$

En outre, les fibrés $T_{1,0}X$ et $T^\vee_{1,0}X$ possèdent naturellement des structures de fibrés holomorphes.

On note $T^\vee_{p,q}X$ le fibré des (p,q)-formes, c'est-à-dire la projection de

$$(T^\vee_{1,0}X)^{\otimes p} \otimes (T^\vee_{0,1})^{\otimes q}$$

(cf Exercice 4 de la première feuille). C'est un fibré vetoriel complexe. On note

$$\mathcal{A}^{p,q}(\mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty(T^\vee_{p,q}X)$$

le faisceau des (p,q)-formes (lisses).

En particulier, le fibré $T^\vee_{k,0}X = \Lambda^k T^\vee_{1,0}X$ possède une structure holomorphe. On note

$$\Omega^k(\mathbb{C}) = \mathcal{O}(T^\vee_{k,0}X)$$

le faisceau des k-formes holomorphes sur X.

Plus généralement, si $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe, on notera

$$\mathcal{A}^{p,q}(E) = \mathcal{C}^\infty(T^\vee_{p,q}X \otimes E = \mathcal{A}^{p,q}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})} \mathcal{C}^\infty(E)$$

le faisceau des (p,q)-formes (lisses) à valeurs dans E, et

$$\Omega^k(\mathcal{E}) = \mathcal{O}(T^\vee_{k,0}X \otimes \mathcal{E} = \Omega^k(\mathbb{C}) \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \mathcal{O}(\mathcal{E}) \ .$$

1.2.3 Connexions et opérateurs $\bar\partial$

Les connexions (resp. les opérateurs $\bar\partial$) sont des opérateurs différentiels sur l'espace des sections d'un fibré vectoriel dont le noyau définit un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (resp. un faisceau de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-modules) de rang fini, et qui permettent donc de retrouver un fibré plat (resp. un fibré holomorphe) à partir du fibré vectoriel sous-jacent.

Rappelons que la *différentielle extérieure*

$$\mathrm{d} : \mathcal{A}^k(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}^{k+1}(\mathbb{C})$$

est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 qui étend la différentiation des fonctions et vérifie

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta) \ .$$

Lorsqu'X est une variété complexe, l'opérateur d se décompose en

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial} \ ,$$

où $\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(\mathbb{C})$ étend l'opérateur de Dolbeault sur les fonctions.

Informellement, une *connexion* (resp. un *opérateur* $\bar{\partial}$) est une extension de d (resp. $\bar{\partial}$) aux formes à valeurs dans un fibré vectoriel.

Définition 1.2.9 (Connexion)**.** Une connexion sur un fibré vectoriel E au dessus d'une variété différentielle réelle X est un opérateur

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{A}^1(E)$$

qui satisfait la règle de Leibniz:

$$\nabla(fs) = (\mathrm{d}f)s + f\nabla s$$

pour tout $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$.

Définition 1.2.10 (Opérateur $\bar{\partial}$)**.** Un *opérateur* $\bar{\partial}$ sur un fibré vectoriel E au dessus d'une variété différentielle complexe X est un opérateur

$$\bar{\partial}_E : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E)$$

qui satisfait la règle de Leibniz:

$$\bar{\partial}_E(fs) = (\bar{\partial}f)s + f\bar{\partial}_E s$$

pour tout $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$.

Exemple 1.2.11. Les opérateurs d et $\bar{\partial}$ s'étendent naturellement au faisceau des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^r$, qu'on peut voir comme le faisceau des section du fibré trivial $X \times \mathbb{C}^r$. On parlera alors de *connexion tautologique* (resp. opérateur $\bar{\partial}$ topologique) sur le fibré trivial. Attention toutefois, ces opérateurs ne sont tautologiques que dans la mesure où l'on s'est donné une trivialisation du fibré.

On vérifie aisément que l'équation $\nabla s = 0$ (resp. $\bar{\partial}_E s = 0$) définit un sous-faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (resp. de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-modules). Nous allons maintenant voir, que, sois une certaine condition d'*intégrabilité*, ce faisceau est localement libre de rang r. Commençons par étendre ces opérateurs aux k-formes à valeurs dans E

Proposition 1.2.12. *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel E. Alors il existe une unique famille d'opérateurs*

$$\mathrm{d}_\nabla : \mathcal{A}^k(E) \to \mathcal{A}^{k+1}(E)$$

tels que

$$\mathrm{d}_\nabla(\alpha s) = (\mathrm{d}\alpha)s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s \ .$$

Proposition 1.2.13. *Soit $\bar\partial_E$ un opérateur $\bar\partial$ sur un fibré vectoriel E. Alors il existe une unique famille d'opérateurs*

$$bar\partial_E : \mathcal{A}^{p,q}(E) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(E)$$

tels que

$$\bar\partial_E(\alpha s) = (\bar\partial\alpha)s + (-1)^k \alpha \wedge \bar\partial_E s \ .$$

Proposition-Définition 1.2.14. *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel E. Il existe un unique tenseur $F_\nabla \in \mathcal{A}^2(X, \mathrm{End}(E))$ tel que*

$$\mathrm{d}_\nabla \nabla s = F_\nabla s$$

pour tout $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$. Le tenseur F_∇ est appelé courbure *de la connexion ∇.*

On a un résultat similaire pour les opérateurs $\bar\partial$:

Proposition 1.2.15. *Soit $\bar\partial$ une connexion sur un fibré vectoriel E. Il existe un unique tenseur $S_{\bar\partial_E} \in \mathcal{A}^{0,2}(X, \mathrm{End}(E))$ tel que*

$$bar\partial_E \bar\partial_E s = S_{\bar\partial_E} s$$

pour tout $s \in \mathcal{C}^\infty(E)$.

(On ne donnera pas de nom au tenseur $S_{\bar\partial_E}$ car dans la suite on aura toujours $S_{\bar\partial_E} = 0$.)

Théorème 1.2.16. *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une variété différentielle réelle X et ∇ une connexion sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $F_\nabla \equiv 0$

(ii) Le faisceau $\{s \in \mathcal{C}^\infty(E) \mid \nabla s = 0\}$ est un système local de rang r

(iii) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et une trivialisation locale $E_U = U \times \mathbb{C}^r$ dans laquelle ∇ est la connexion tautologique.

On dira alors que la connexion ∇ est intégrable *(ou, éventuellement,* plate*).*

Lorsque ∇ est intégrable, les trivialisations locales données par la propriété (iii) munissent E d'une structure de fibré plat, dont le faisceau des sections plates est le faisceau donné par (ii). Réciproquement, si $\mathbf{E}$ est un fibré plat, il existe une unique connexion ∇ sur E, intégrable, telle que

$$S(\mathbf{E}) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(E) \mid \nabla s\} .$$

Conclusion (informelle): un fibré plat est la même chose qu'un fibré vectoriel muni d'une connexion intégrable.

On a maintenant un résultat tout à fait analogue pour les opérateurs $\bar\partial$ et les fibrés holomorphes:

Théorème 1.2.17. *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une variété différentielle réelle X et $\bar\partial_E$ un opérateur $\bar\partial$ sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\bar\partial_E \circ \bar\partial_E \equiv 0$,

(ii) *Le faisceau $\{s \in \mathcal{C}^\infty(E) \mid \bar\partial_E s = 0\}$ est un fibré de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-modules localement libre de rang r,*

(iii) *Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et une trivialisation locale $E_U = U \times \mathbb{C}^r$ dans laquelle $\bar\partial_E$ est l'opérateur $\bar\partial$ tautologique.*

On dira alors que l'opérateur $\bar\partial_E$ est intégrable.

Lorsque $\bar\partial_E$ est intégrable, les trivialisations locales données par la propriété (iii) munissent E d'une structure de fibré holomorphe, dont le faisceau des sections holomorphe est le faisceau donné par (ii). Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe, il existe un unique opérateur $\bar\partial_E$ sur E, intégrable, telle que

$$\mathcal{O}(E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(E) \mid \bar\partial_E s\} .$$

Conclusion (informelle): un fibré holomorphe est la même chose qu'un fibré vectoriel muni d'un opérateur $\bar\partial$ intégrable.

1.2.4 Correspondance de Riemann–Hilbert

Soit $\mathbf{E}$ un fibré plat sur une variété différentielle connexe X. Fixons un point base o dans X. Notons $\tilde X$ le revêtement universel de X et $\tilde{\mathbf{E}}$ le tiré en arrière de $\mathbf{E}$ par l'application de revêtement. C'est encore un fibré plat sur $\tilde X$.

Lemme 1.2.18. *Tout fibré plat sur une variété simplement connexe est trivial.*

On en déduit un isomorphisme canonique de fibrés plats

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{X} \times \mathbf{E}_o \ .$$

L'action du groupe fondamental $\pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$ se relève en une action sur $\tilde{\mathbf{E}}$ qui est linéaire dans les fibres et indépendante du point. Il existe donc une représentation linéaire

$$\rho : \pi_1(X, o) \to \mathrm{GL}(\mathbf{E}_o)$$

telle que

$$\mathbf{E} = \tilde{X} \times \mathbf{E}_o / (x, v) \sim (x \cdot \gamma^{-1}, \rho(\gamma)v) \ .$$

Définition 1.2.19. La représentation ρ est appelée *holonomie* du fibré plat.

Notons que l'holonomie agit naturellement sur la fibre en un point. On peut la voir comme une représentation linéaire dans $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ à condition de choisir une base de la fibre. Cette représentation est donc bien définie modulo conjugaison.

Réciproquement, soit $\rho : \pi_1(X, o) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Alors le quotient du fibré trivial $\tilde{X} \times \mathbb{C}^r$ par l'action

$$\gamma \cdot (x, v) = (x \cdot \gamma^{-1}, \rho(\gamma v))$$

est un fibré plat sur X d'holonomie ρ.

En résumé, on a une correspondance entre les objets suivants:

1. Les fibrés plats de rang r sur X
2. Les fibrés vectoriels de rang r sur X munis d'une connexion intégrable
3. les classes de conjugaison de représentations de $\pi_1(X)$ dans $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Cette correspondance est parfois appelée *correspondance de Riemann–Hilbert.*

Soit $\mathbf{E}$ un fibré plat. Un *sous-fibré plat* est un sous-fibré $\mathbf{F}$ engendré localement par des sections plates de E.

Proposition-Définition 1.2.20. *Soit* $\mathbf{E}$ *un fibré plat de rang* r *et* $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(\mathbf{E}_o)$ *sa représentation d'holonomie. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathbf{E}$ *n'admet pas de sous-fibré plat* $\{0\} \subsetneq \mathbf{F} \subsetneq \mathbf{E}$*,*

(ii) $\mathbf{E}_o$ *n'admet pas de sous-espace* ρ*-invariant* $\{0\} \subsetneq \mathbf{F}_o \subsetneq \mathbf{E}_o$*.*

On dit alors que le fibré plat et la représentation ρ *sont* irréductibles.

Proposition-Définition 1.2.21. *Soit* $\mathbf{E}$ *un fibré plat de rang* r *et* $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(\mathbf{E}_o)$ *sa représentation d'holonomie. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout sous-fibré plat* $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$*, il existe un sous-fibré plat* $\mathbf{G} \subset \mathbf{E}$ *tel que* $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$*,*

(ii) $\mathbf{E}$ *est somme directe de fibrés plats irréductibles,*

(iii) *Tout sous-espace* ρ*-invariant de* $\mathbf{E}_o$ *admet un supplémentaire* ρ*-invariant,*

(iv) *La représentation* ρ *est somme directe de représentations irréductibles.*

On dit alors que le fibré plat et la représentation ρ *sont* semisimples *ou* réductives.

1.2.5 Classes de Chern

Nous donnons ici un très bref aperçu de la notion de *classes de Chern* d'un fibré vectoriel, à la fois du point de vue de la topologie et de la géométrie différentielle. Le lien entre les deux points de vue est donné par l'*isomorphisme de Chern–Weil*.

Un *espace classifiant* pour les fibrés vectoriels complexes de rang r est un espace topologique B_r muni d'un fibré vectoriel E_{univ} qui est "universel" au sens où, pour tout fibré vectoriel (topologique) E de rang r sur un espace topologique X, il existe une application continue $f : X \to B_r$, unique à homotopie près, telle que $E \simeq f^* E_{univ}$.

Il se trouve qu'un tel espace classifiant existe et que deux espaces classifiants sont homotopiquement équivalents. En particulier, les classes de cohomologie de B_r (à coefficients entiers) sont bien définies. Leur tiré en arrière par l'application f fournit des classes de cohomologies entières de X appelées *classes caractéristiques* du fibré E.

Le théorème suivant décrit précisément l'algèbre de cohomologie de B_r:

Théorème 1.2.22. *Il existe* $(C_i)_{1\leq i\leq r}$*,* $C_i \in \mathrm{H}^{2i}(B_r, \mathbb{Z})$ *telles que* $\mathrm{H}^\bullet(B_r, \mathbb{Z})$ *est l'algèbre librement engendrée par les* C_i*.*

Définition 1.2.23. Soit E un fibré vectoriel de rang r sur un espace topologique X et $f : X \to B_r$ telle que $E \simeq f^* E_{univ}$. La classe de cohomologie

$$c_i(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f^* C_i$$

est appelée *i-ième classe de Chern* du fibré E.

Nous n'identifions pas ici précisément les classes de Chern, mais donnons un moyen de les calculer en fonction de la courbure d'une connexion. Commençons par énoncer le fait suivant:

Proposition 1.2.24. *Tout fibré vectoriel E sur une variété X admet une connexion ∇. De plus, l'espace des connexions sur E est un espace affine d'espace vecoriel sous-jacent $\mathcal{A}^1(X, E)$.*

Soit ∇ une connexion sur E. Soit $P : M_r(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un polynôme homogène de degré k invariant par conjugaison. Alors on peut évaluer P sur le tenseur de courbure $F_\nabla \in \mathcal{A}^2(\mathrm{End}(E))$ et obtenir une $2k$-forme $P(F_\nabla)$.

Proposition 1.2.25. *La forme $P(F_\nabla)$ est fermée, et sa classe de cohomologie ne dépend pas de ∇.*

Or, l'algèbre des polynômes invariants sur $M_r(\mathbb{C})$ est librement engendrée par les *polynômes symétriques élémentaires*, donnés par les coefficients du polynôme charactéristique. L'*isomorphisme de Chern–Weil* affirme que les classes de Chern de E sont précisément les classes de cohomologies obtenues en appliquant ces polynômes élémentaires à l'a courbure d'une connexion quelconque.

Théorème 1.2.26 (Isomorphisme de Chern–Weil)**.** *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une variété X et ∇ une connexion quelconque sur E. Alors*

$$\left[\det(\mathrm{Id}_E + \frac{it}{2\pi} F_\nabla)\right] = 1 + \sum_{k=1}^{r} c_k(E) t^k \ .$$

Corollaire 1.2.27. *Si E admet une connexion plate, alors toutes ses classes de Chern sont nulles.*

La classe $c(E) = 1 + \sum_{k=1}^{r} c_k(E) \in \mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{Z})$ (qui "contient" toutes les classes de Chern) s'appelle le *polynôme de Chern*. Elle permet d'exprimer synthétiquement les classes de Chern d'une somme directe de fibrés:

Proposition 1.2.28. *Soient E et F deux fibrés vectoriels. Alors*

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F) \ .$$

Exemple 1.2.29. La *première classe de Chern* d'un fibré vectoriel E de rang r est la classe

$$c_1(E) = [\mathrm{Tr} F_\nabla]$$

où ∇ est une connexion quelconque sur E. C'est aussi la première classe de Chern du fibré en droites $\det(E) \overset{\text{def}}{=} \Lambda^r E$.

Classe de Chern et degré On suppose ici que X est une surface compacte sans bord orientée. Soit E un fibré vectoriel de rang r sur X. Les classes de Chern $c_i(E)$, $i \geq 2$ s'annulent par dimension. Par ailleurs, on a un isomorphisme $H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$ donné par

$$\alpha \mapsto \int_X \alpha \ .$$

Définition 1.2.30. Le *degré* du fibré E est défini par

$$\deg(E) = \int_X c_1(E) \ .$$

Théorème 1.2.31. *Soient E et F deux fibrés vectoriels sur une surface compacte X. Alors E et F sont isomorphes si et seulement s'ils ont même rang et même degré.*

Remarque 1.2.32. Attention, on parle ici d'isomorphisme de fibrés lisses. Sur une surface de Riemann, il existe toute une famille de fibrés holomorphes de degré 0 qui ne sont pas isomorphes (c'est la *jacobienne* de la surface de Riemann).

Comme on l'a vu, le degré d'un fibré E est (presque par définition) le degré du fibré en droites $\det(E)$. Par ailleurs, pour un fibré en droites, le degré s'interprète comme l'auto-intersection de la section nulle :

Proposition 1.2.33. *Soit L un fibré en droites complexes sur une surface compacte orientée X et s une section lisse générique de L. Alors*

$$\deg(L) = \sum_{x \mid s(x)=0} \varepsilon_x \ ,$$

où $\varepsilon_x = \pm 1$ suivant que s (vue localement comme application de X dans L_x) préserve ou renverse l'orientation.

Supposons enfin que X est une surface de Riemann et $\mathcal{L}$ un fibré en droite holomorphe. Soit alors s une section méromorphe de L. On peut modifier s en une section lisse s' qui s'annule aux 0 et pôles de s avec un signe positif aux 0 et un signe négatif aux pôles (et éventuellement une multiplicité donnée par l'ordre du zéro ou du pôle). On conclut alors:

Proposition 1.2.34. *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compact X et s une section méromorphe de $\mathcal{L}$. Alors*

$$\deg(L) = |\{\textit{zéros de } s\}| - |\{\textit{pôles de } s\}| \ ,$$

où les zéros et les pôles sont comptés avec multiplicité.

On obtient le corollaire suivant:

Corollaire 1.2.35. *Un fibré en droites holomorphe de degré strictement négatif n'admet pas de section holomorphe (globale). Un fibré en droites holomorphe de degré 0 admet une section holomorphe si et seulement s'il est holomorphiquement trivial.*

Le degré d'un fibré holomorphe est donc un objet extrêmement utile en géométrie complexe. Mais n'oublions pas qu'il est avant tout un invariant *topologique* des fibrés vectoriels.

1.2.6 Fibrés hermitiens

Rappelons qu'un *produit scalaire hermitien* h sur un espace vectoriel complexe$V$ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur V qui vérifie:

- $h(\lambda u, \mu v) = \lambda\bar{\mu}h(u,v)$ pour tous $u, v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
- $h(v,u) = \overline{h(u,v)}$ pour tous $u, v \in V$,
- $h(u,u) \in \mathbb{R}_{>0}$ pour tout $u \in V\backslash\{0\}$.

Soit E un fibré vectoriel sur une variété différentielle X. On peut voir E comme un fibré vectoriel réel $E_{\mathbb{R}}$ muni d'un champ d'endomorphismes J tel que $J^2 = -\mathrm{Id}_E$. On note $\bar{E}$ le fibré vectoriel complexe $(E_{\mathbb{R}}, -J)$.

Définition 1.2.36. Une *métrique hermitienne* h sur E est une famille lisse de produits scalaires hermitiens sur les fibres de V, i.e. une section lisse de $E^\vee \otimes \bar{E}^\vee$ telle que

- $h(v,u) = \overline{h(u,v)}$ pour tous $u, v \in E_{\mathbb{R}}$,
- $h(u,u) \in \mathbb{R}_{>0}$ pour tout $u \in E_{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$.

On appellera *fibré hermitien* un fibré vectoriel muni d'une métrique hermitienne.

Soit (E,h) un fibré hermitien.

Si $\Psi \in \mathcal{A}^k(\mathrm{End}(E))$, on définit sont adjoint Ψ^* (par rapport à h) par la relation

$$h(\Psi s_1, s_2) = h(s_1, \Psi^* s_2) \ .$$

Sur une variété complexe, l'adjonction envoie $\mathcal{A}^{p,q}(\mathrm{End}(E))$ sur $\mathcal{A}^{q,p}(\mathrm{End}(E))$.

On notera $\mathrm{Sym}_h(E)$ le fibré vectoriel réel

$$\mathrm{Sym}_h(E) = \{\Psi \in \mathrm{End}(E) \mid \Psi^* = \Psi\} \ .$$

Définition 1.2.37. On dit qu'une connexion ∇ *preserve* h si

$$\mathrm{d}h(s_1, s_2) = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)$$

pour toutes sections s_1, s_2 de E.

Proposition 1.2.38. *Soit (E,h) un fibré hermitien et ∇ et ∇' deux connexions qui préservent h. Alors*

- $\nabla' = \nabla + A$ *où* $A \in \mathcal{A}^1(X, \mathrm{End}(E))$ *vérifie* $A^* = -A$,
- $F_\nabla^* = -F_\nabla$. *Ici, l'opérateur* * *est l'adjonction* $\mathrm{End}(E)$ *par rapport à la métrique* h.

Tout fibré vectoriel E admet une métrique hermitienne h et une connexion qui la préserve. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Proposition 1.2.39. *Soit (E,h) un fibré hermitien et ∇ une connexion sur E. Alors il existe une unique décomposition*

$$\nabla = \nabla_h + \Psi_h$$

où ∇_h est une connexion qui préserve h et $\Psi_h \in \mathcal{A}^1(X, \mathrm{Sym}_h(E))$.

Théorème 1.2.40. *Soit $(E, \bar\partial_E)$ un fibré holomorphe et h une métrique hermitienne sur E. Alors il existe une unique connexion ∇_h préservant h et telle que*

$$\nabla_h^{0,1} = \bar\partial_h \ .$$

Cette connexion est appelée connexion de Chern de h.

Proof. Si ∇_h préserve h, alors

$$\mathrm{d}h(s_1, s_2) = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)$$

□

1.2.7 Fibrés de Higgs

Nous avons maintenant tous les outils en main pour introduire les *fibrés de Higgs*. Donnons-en d'abord une définition générale sur n'importe quelle variété complexe.

Définition 1.2.41 (Fibré de Higgs sur une variété complexe quelconque)**.** Un *fibré de Higgs* de rang r sur une variété complexe X est une paire $(\mathcal{E}, \Phi)$ où

- $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe de rang r sur X
- Φ est une 1-forme holomorphe sur X à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathcal{E})$ qui satisfait l'équation
$$\Phi \wedge \Phi = 0 \ .$$

Le tenseur holomorphe Φ est appelé *champ de Higgs*.

En pratique, construire des fibrés de Higgs en dimension ≥ 2 est (très?) difficile, et la théorie a surtout été utilisé pour montrer des résultats *négatifs* (absence de représentations linéaires, rigidité de certaines représentations, certains groupes ne peuvent pas être le groupe fondamental d'une variété kählérienne...)

Dans ce cours, nous nous focalisons principalement sur le cas d'une surface de Riemann, pour lequel deux choses rendent la théorie plus flexible:

- Au dessus d'une surface de Riemann, tout opérateur $\bar{\partial}$ sur E est intégrable.
- Pour tout $\Phi \in \mathcal{A}^{1,0}(X, \mathrm{End}(E))$, on a automatiquement
$$\Phi \wedge \Phi = 0 \ .$$

Ces deux faits découle tout simplement du fait qu'il n'y a pas de $(2,0)$-forme ni de $(0,2)$-forme non nulle en dimension complexe 1.

On utilisera donc plutôt la définition simplifiée suivante:

Définition 1.2.42 (Fibrés de Higgs sur une surface de Riemann)**.** Un *fibré de Higgs* de rang r sur une surface de Riemann X est un triplet $(E, \bar{\partial}_E, \Phi)$ où

- E est un fibré vectoriel complexe de rang r,
- $\bar{\partial}_E$ est un opérateur $\bar{\partial}$ sur E,
- $\Phi \in \mathcal{A}^{1,0}(X, \mathrm{End}(E))$ vérifie
$$\bar{\partial}_E \Phi = 0 \ .$$

Définition 1.2.43. Soit X une surface de Riemann et $(E, \bar{\partial}_E, \Phi)$ un fibré de Higgs sur X. Un *sous-fibré de Higgs* est un sous-fibré holomorphe Φ-invariant, i.e. un sous-fibré vectoriel F de E tel que pour toute section $s \in \mathcal{C}^\infty(F)$,

- $\bar{\partial}_E s \in \mathcal{A}^{0,1}(F)$,
- $\Phi s \in \mathcal{A}^{1,0}(F)$.

Définition 1.2.44. Un fibré de Higgs $(E, \bar{\partial}_E, \Phi)$ est *stable* (resp. *semistable*) si pour tout sous-fibré de Higgs F, on a

$$\frac{\deg(F)}{\mathrm{rang}(F)} < \frac{\deg(E)}{\mathrm{rang}(E)} \quad \left(\text{resp. } \frac{\deg(F)}{\mathrm{rang}(F)} \leq \frac{\deg(E)}{\mathrm{rang}(E)}\right) \tag{1.1}$$

La condition 1.1 a le bon goût d'être stable par tensorisation de E et F par un même fibré en droite. Dans le cas où $\deg(E) = 0$, la condition devient tout simplement:

$$\frac{\deg(F)}{\mathrm{rang}(F)} < 0 \quad \left(\text{resp. } \frac{\deg(F)}{\mathrm{rang}(F)} \leq 0\right) \tag{1.2}$$

Enfin, définissons la notion de fibré de Higgs *polystable*:

Définition 1.2.45. A Higgs bundle $(E, \bar{\partial}_E, \Phi)$ is *polystable* if it is isomorphic to a direct sum of stable Higgs bundles of the same slope:

$$(E, \bar{\partial}_E, \Phi) = \left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_i, \bigoplus_{i=1}^{k} \bar{\partial}_{E_i}, \bigoplus_{i=1}^{k} \Phi_i \right) ,$$

where the $(E_i, \bar{\partial}_{E_i}, \Phi_i)$ are stable and

$$\frac{\deg(E_i)}{\mathrm{rang}(E_i)} = \frac{\deg(E)}{\mathrm{rang}(E)} .$$

In particular, a Higgs bundle of degree 0 is polystable if it is a direct sum of stable Higgs bundles of degree 0.