Séries de Fourier

Exercice 1 : Ce qu'il faut savoir sur les séries de Fourier

On considère $H = L^2([0, 2\pi])$ (i.e. fonctions mesurables de carré intégrable) muni du produit scalaire complexe :

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

On note également C le sous-espace de H formé des fonctions continues telles que $f(0) = f(2\pi)$ (qui s'identifie donc aux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$). On étendra toute fonction de H par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto e^{inx}$.
Si $f \in H$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{f}(n) = c_n(f) = (f, e_n)$ le n-ième coefficient de Fourier de f.

1. Vérifier que (e_n) est une famille orthonormée de H. Pour $f \in C$ et $g \in H$, on pose

   $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)dy$. On admet que $f * g$ est bien définie et que $f * g \in C$. (Ce sont des conséquences du cours d'intégration).

   On adopte également les notations suivantes pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in H$,

   $$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k \text{ et } \Sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$$

   On dit que $S_n(f)$ est la **série de Fourier** de f. Enfin, on pose $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ et $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$. On dit que D_n est le **noyau de Dirichlet** que que K_n est le **noyau de Fejér**.
2. Soient $f \in H$, $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Vérifier les relations suivantes :
   a) $e_k * f = c_k(f)e_k$
   b) $S_n(f) = D_n * f$.
   c) $\Sigma_n(f) = K_n * f$.
   d) Pour $x \in]0, 2\pi[$,
   $$D_n(x) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)}$$
   e) Pour $x \in]0, 2\pi[$,
   $$K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$
3. Soif $f \in C$.
   a) Vérifier que $\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = 1$.
   b) Soit $\delta > 0$. Montrer que $\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(x)dx \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   c) Montrer que $(\Sigma_n(f))$ converge vers f uniformément sur $[0, 2\pi]$.

   Remarque. Ce résultat est le **théorème de Fejér**. Il montre notamment que toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques. De plus, en utilisant le théorème de Césaro, on peut déduire que si $(S_n(f))$ converge en un point x (resp. uniformément), elle converge nécessairement vers $f(x)$ (resp. f).

4. Soit $f \in C$ de classe C^1 par morceaux.
   a) Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.
   b) En déduire que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.
   c) Conclure, en utilisant la remarque, que $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.
5. **Applications.** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie pour $x \in [-\pi, \pi[$ par x^2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
6. *Pour ceux qui sont à déjà à l'aise avec les notions d'intégration.* Soit $f \in H$. Montrer que $\Sigma_n(f) \to f$ dans H. On pourra utiliser le résultat suivant (admis) :

   Théorème. Si $f \in H$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_y(f)$ par $\tau_y(f)(x) = f(x-y)$ (bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$). $\tau_y(f)$ est un élément de H, de même norme que f et l'application $y \in \mathbb{R} \mapsto \tau_y(f) \in H$ est continue.

   Remarque. Ce résultat montre que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de H i.e. c'est une famille orthonormée dont l'espace qu'elle engendre est dense dans H. En effet, si l'on note, $E = \text{Vect}(e_k, k \in \mathbb{Z})$, le résultat précédent montre que $\overline{E} = H$. Puisque les e_k forment une famille orthonormée, c'est donc bien une base Hilbertienne de H. En particulier, les résultats usuels dans les espaces de Hilbert donnent que pour tout $f \in H$, $\sum_{k=-n}^{n} (f, e_k)e_k \to f \in H$. C'est exactement dire que $S_n(f) \to f$ dans H.

Exercice 2 : La série de Fourier ne converge pas toujours

Dans cet exercice,on munit C de la norme de la convergence uniforme $||\cdot||_\infty$ et $|||\cdot|||$ désigne la norme d'opérateurs associés sur l'espace C^* des formes linéaires continues $T : C \to \mathbb{C}$. On admet le résultat suivant :

Corollaire. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de formes linéaires continues sur C. On suppose que pour tout $f \in C, (T_n f)_n$ est bornée. Alors $(|||T_n|||)_n$ est bornée.

Remarque. Il s'agit d'un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus qui sera vu plus tard cette année.

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas simplement en 0.

1. Montrer que les applications $T_n : f \in C \mapsto S_n(f)(0) \in \mathbb{C}$ sont des applications linéaires continues.
2. Montrer plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|||T_n||| = ||D_n||_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt$. On rappelle que $|||\cdot|||$ désigne la norme d'opérateurs.
3. Montrer que $||D_n||_1 \to \infty$ quand $n \to \infty$.
4. En déduire l'existence de fonctions $f \in C$ telle que $S_n(f)(0)$ ne converge pas vers $f(0)$.

Exercice 3 : Un contre-exemple explicite

Pour les plus terre à terre d'entre vous, on va construire un contre-exemple d'une fonction $f \in C$ telle que $S_n(f)(0)$ ne converge pas vers $f(0)$.

On note $n_k = 3^{k^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$G_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1}$$

et pour $k \geq 1$.

$$P_k(x) = e^{3in_kx} G_{n_k}(x)$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 1, n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(P_k) \neq 0 \implies n_k - 1 \leq n \leq 5n_k + 1$$

2. **Etude de G_n** : L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, |G_n(x)| \leq C$. Puisque G_n est 2π-périodique, impaire et vérifie $G_n(t+\pi) = -G_n(t)$, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi/2[$.
   a) Montrer que G_n est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et que

$$G_n'(t) = \frac{\sin(2(n+1)t)}{2\sin t}$$

   b) Montrer que les extrema locaux de G_n dans $]0, \pi/2[$ sont aux points $\tau_k = \frac{k\pi}{2(n+1)}$, $k = 1, \dots, n$. Identifier les maxima et les minima.
   c) Montrer que pour $j = 1, \dots, n$, (où l'on a posé $\tau_0 = 0, \tau_{n+1} = \pi/2$)

$$|G_n(\tau_j) - G_n(\tau_{j-1})| \geq |G_n(\tau_{j+1}) - G_n(\tau_j)|$$

   d) En déduire que $||G_n||_\infty = G_n(\tau_1)$ puis conclure.
3. a) Montrer que l'on définit un élément de C en posant :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2} P_k(x)$$

   b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   c) En déduire l'égalité :

$$S_{3n_k}(f) = \sum_{j=1}^{k-1} j^{-3/2} P_j - \frac{k^{-3/2}}{2i} \sum_{l=0}^{n_k} \frac{e_{3n_k-2l-1}}{2l+1}$$

4. On rappelle l'équivalence classique

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sim \log n$$

   En déduire que $|S_{3n_k}(f)(0)| \to +\infty$ quand $k \to +\infty$, puis conclure.