DM : Le lemme de Zorn pour analystes

L'objectif de ce DM est de présenter le lemme de Zorn d'un point de vue purement pratique. On proposera notamment une démonstration du Théorème de Tychonoff.

Prérequis.

Définition 1. Soient $(E, \leq)$ ensemble ordonné, $A \subset E$ et $x \in X$. On dit que x est :

- un élément majorant de A si pour tout $a \in A, a \leq x$
- un élément maximal (de X) si pour tout $y \in X, x \leq y \implies x = y$.

Définition 2. On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est :

- totalement ordonné si pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ ou $y \leq x$
- inductif si toute partie $A \subset E$ totalement ordonnée (pour l'ordre $\leq$ induit) possède un majorant.

Le lemme de Zorn, dont l'énoncé est donné ci-dessous, est équivalent à l'axiome du choix. En tant que non-logiciens, non admettons cet axiome et donc prenons pour acquis la véracité du lemme de Zorn.

Théorème. Lemme de Zorn. Tout ensemble inductif non vide possède un élément maximal.

Exercice 1 : Comprendre comment appliquer le lemme de Zorn

Nous détaillons dans cet exercice le raisonnement classique pour appliquer le lemme de Zorn à un cas bien connu : l'existence des bases.
On fixe E un espace vectoriel sur un corps K quelconque. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des familles libres de E. Vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, on munit $\mathcal{L}$ de la relation d'ordre $\subset$.

1. On souhaite montrer que $(\mathcal{L}, \subset)$ est inductif. On considère donc $A \subset \mathcal{L}$ totalement ordonnée, i.e. $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{L}$, $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.
   a) On note $F_\infty = \bigcup_{F \in A} F \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $F_\infty \in \mathcal{L}$.
   b) En déduire que A possède un majorant.
2. Montrer qu'une famille libre maximale (i.e. un élément maximal de $(\mathcal{L}, \subset)$ est une base de E.
3. En utilisant le lemme de Zorn, montrer que E possède une base.

Problème : Une démonstration du théorème de Tychonoff.

Le problème qui suit consiste à démontrer le théorème de Tychonoff :

Théorème. Tout produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact.

Ce problème se compose de 3 exercices. L'exercice 4 dépend des exercices 2 et 3. Dans tout le problème, on se donne un ensemble quelconque I, et une famille d'espaces topologiques compacts $(X_i)_{i\in I}$ et on veut montrer que $X = \prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit est compact. On note $p_i : X \to X_i$ les projections.

Exercice 2 : Préliminaires

1. On rappelle que la topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections. Montrer qu'une base d'ouverts de la topologie de X est donnée par
$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j), J \subset I \text{ fini }, U_j \subset X_j \text{ ouvert } \right\}$$
2. Montrer que X est séparé (=T2).

Exercice 3 : Généralités sur les filtres

On fixe un espace topologique Y quelconque dans tout cet exercice. On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages d'un point $x \in Y$.

Définition 3. On dit qu'une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ est un **filtre** sur Y si :
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie ;
- Si $F \in \mathcal{F}$ et $F \subset G$ alors, $G \in \mathcal{F}$.

On définit les notions suivantes :

Définition 4. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur Y. On dit que :
1. $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **compatibles** s'il existe un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.
3. $\mathcal{F}$ est un **ultrafiltre** si c'est un filtre maximal pour la relation de finesse.

On définit enfin des notions de convergence :

Définition 5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre et $x \in Y$. On dit que :
- le filtre $\mathcal{F}$ converge vers x si $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{V}_x$;
- le filtre $\mathcal{F}$ admet x comme valeur d'adhérence si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_x$ sont compatibles.

1. *Sur la Définition 3.*

   a) *Ce qui justifie la définition 5.* Soit $x \in Y$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de X est un filtre.
   b) *Filtre image.* Soient Z un espace topologique, $f : Z \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ un filtre sur Z. Montrer que

$$f_\star \mathcal{F} \coloneqq \{G \subset Y; f^{-1}(G) \in \mathcal{F}\}$$

   est un filtre sur Y, appelé filtre image de $\mathcal{F}$ par f.

2. *Sur la Définition 4.*
   a) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont compatibles si et seulement si pour tout $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, F \cap G \neq \emptyset$.
   b) Montrer la caractérisation suivante des ultrafiltres : le filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si

$$(*) \text{ pour tout } A \subset X, A \in \mathcal{F} \text{ ou } X \setminus A \in \mathcal{F}$$

   c) En déduire que le filtre image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.
3. *Sur la Définition 5.*
   a) Montrer que x est une valeur d'adhérence du filtre $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $F \in \mathcal{F}, x \in \overline{F}$.
   b) Montrer que si un ultrafiltre $\mathcal{U}$ admet $x \in Y$ comme valeur d'adhérence, alors il converge vers x.
4. *Zorn sort de cette question.* Montrer que tout filtre est inclus dans un ultrafiltre.

Exercice 4 : Démonstration du théorème de Tychonoff

1. Soit Y un espace topologique séparé. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
   (i) Y est compact.
   (ii) Tout filtre sur Y possède une valeur d'adhérence.
   (iii) Tout ultrafiltre sur Y converge.

   Indication : on pourra utiliser l'énoncé suivant, équivalent à la propriété de Borel-Lebesgue : si $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille quelconque de fermés telle que pour tout $B \subset A$ fini, $\bigcap_{b \in B} F_b \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$.
2. Démontrer le théorème i.e. que X est compact.