

## DM 3

Dans ce DM, je vous propose de regarder deux résultats très importants :

- Le principe du maximum, très utile dans l'étude des EDP (Equations aux Dérivées Partielles) pour montrer l'unicité de solutions de problème avec conditions aux limites. Prérequis : Vous avez besoin de savoir deux ou trois choses sur la matrice hessienne.
- Le théorème des extrema liées. C'est un résultat qu'il est bon d'avoir en tête et qui est une généralisation d'un fait bien connu : la différentielle d'une fonction s'annule en un extremum local. Ici, on montre que si une fonction possède un extremum local sur une variété, alors sa différentielle satisfait certaines conditions. C'est un résultat utile pour déterminer des extrema sous contraintes. Il reprend en grande partie l'énoncé d'un exercice de l'examen de l'an dernier. Prérequis : Il faut avoir vu le théorème d'inversion locale.



### Exercice 1 : Principe du maximum

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné, de bord  $\partial\Omega$ .

1. Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  tel que  $\Delta u(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .
  - a) On suppose dans un premier temps que  $\Delta u(x) > 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Montrer que  $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .
  - b) On ne suppose plus que l'inégalité est stricte. En introduisant  $\varepsilon > 0$  et  $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon x_1^2$ , montrer que l'on a encore :  $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .
2. On suppose désormais que  $L$  est un opérateur différentiel d'ordre 2 que l'on écrit

$$Lu = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

et on fait l'hypothèse que  $A$  est une matrice symétrique positive (  $\langle AX, X \rangle \geq 0$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ) non nulle. Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  tel que  $Lu(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . On souhaite montrer que  $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .

- a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques positives, alors  $\text{tr}(AB) \geq 0$ .
  - b) En s'inspirant de la question précédent et en introduisant  $u_\varepsilon = u + \varepsilon e^{\lambda x_i}$  pour un bon choix de l'indice  $i$  et de  $\lambda$ , démontrer le résultat souhaité.
3. **Applications.** Soit  $f \in C^0(\partial\Omega)$ . Montrer que le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu(x) = 0 & , \quad x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

possède au plus une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ .

## Exercice 2 : Théorème des extrema liés et applications

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $g_1, \dots, g_p : U \rightarrow \mathbb{R}$  des applications de classes  $C^1$ . On note  $M = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$  et on fixe  $a \in M$ . On fera l'hypothèse suivante :

$$(dg_1(a), \dots, dg_p(a)) \text{ est une famille libre de } (\mathbb{R}^n)^*. \quad (1)$$

On rappelle que l'on dit qu'un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  est tangent à  $M$  en  $a$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$  telle que  $\text{Im } \gamma \subset M$ ,  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma'(0) = v$ . On note  $T_a M$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $a$ .

1. Montrer que  $T_a M \subset \bigcap_{i=1}^p \ker dg_i(a)$ .
2. Dans cette question, on veut montrer que  $T_a M = \bigcap_{i=1}^p \ker dg_i(a)$ .
  - a) Soient  $L_{p+1}, \dots, L_n$  des formes linéaires telles que  $(dg_1(a), \dots, dg_p(a), L_{p+1}, \dots, L_n)$  forme une base de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . On note

$$\Phi : x \in U \mapsto (g_1(x), \dots, g_p(x), L_{p+1}(x-a), \dots, L_n(x-a)) \in \mathbb{R}^n$$

Calculer sa différentielle.

- b) En déduire qu'il existe des voisinages ouverts  $V$  de  $a$ ,  $W$  de  $0$  et  $\Psi : W \rightarrow V$  un  $C^1$  difféomorphisme tel que pour tout  $x \in W$  et  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $g_i \circ \Psi(x) = x_i$ .
  - c) Conclure.
3. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On suppose que la restriction de  $f$  à  $M$  possède un extremum (pour fixer les idées, on suppose ici que c'est un maximum) local en  $a$  i.e. il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in V \cap M$ ,  $f(x) \leq f(a)$ .
  - a) Montrer que  $T_a M \subset \ker df(a)$ .
  - b) En déduire le **théorème des extrema liés** : il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a) \quad (2)$$

4. **Une première application.** Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. On note  $\mathbb{S}^{n-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  pour la norme euclidienne.
  - a) Justifier que l'application  $q : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, Ax)$  est  $C^1$  et donner sa différentielle.
  - b) Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que

$$q(a) = \max_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} q(x)$$

c) Montrer que  $a$  est un vecteur propre de  $A$ .

5. **Une deuxième application.** Trouver le  $n$ -uplet  $(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$  qui minimise l'application d'entropie  $H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$  sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .