Problème : Sous-groupes de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Rappels et notations

- On note $d \geq 1$ un entier.
- On rappelle que $\exp : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est de classe C^1.

I - Compléments sur l'exponentielle de matrices

1. Montrer qu'il existe $V \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ un voisinage de Id, $U \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ un voisinage de 0 et un C^1-difféomorphisme $l : V \to U$ tels que pour tout $A \in V, \exp(l(A)) = A$.
2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si (A_n) est une suite de matrices qui converge vers A, alors
   $$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{Id} + \frac{A_n}{n}\right)^n$$
   (b) Montrer que
   $$\exp(A+B) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n$$
   (c) On note $[A, B] = AB - BA$ le crochet de Lie de A et B. Montrer que
   $$\exp([A,B]) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\exp\left(\frac{-A}{n}\right)\exp\left(\frac{-B}{n}\right)\right)^{n^2}$$
3. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. On définit alors l'algèbre de Lie de G (que l'on notera par la (les) lettre(s) gothique(s) minuscule(s) correspondante(s))
   $$\mathfrak{g} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}); \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in G\}$$
   (a) En utilisant les questions précédentes, montrer que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(R)$ stable par crochet i.e. si $A, B \in \mathfrak{g}$ alors $[A, B] \in \mathfrak{g}$.
   (b) **Exemples** : Montrer que les algèbres de Lie de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ et de $O_d(\mathbb{R})$ sont :
   $$\mathfrak{sl}_d(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_d(R); \mathrm{tr}(A) = 0\}; \quad \mathfrak{o}_d(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}); A = -{}^tA\}$$

II-Quelques notions de sous-variété de $\mathbb{R}^d$

Définition. *On dit que $M \subset \mathbb{R}^d$ est une sous-variété lisse de dimension p en $a \in M$ s'il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^d$ et un C^∞-difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$ tel que*
$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$
On dit que M est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^d$ de dimension p si c'est une sous-variété lisse de dimension p en tout point $a \in M$.

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Soit $a \in U$ tel que $df(a)$ est surjective (on dit que f est une submersion en a). On suppose de plus que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage W de a dans U, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et un C^k difféomorphisme $\psi : V \to W$ tels que pour tout $x \in V$,

$$f \circ \psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$$

2. Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une sous-variété lisse de dimension p et soit $a \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^{d-p}$ une submersion tels que

$$M \cap U = f^{-1}(\{0\})$$

3. Réciproquement, on se donne un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}^{d-p}$ de classe C^∞ et $a \in U$ tel que $df(a)$ est surjective. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété lisse en a. Quelle est sa dimension.

4. En déduire que $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ et $O_d(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés lisses. Donner leur dimension.

III- Théorème de Cartan Von-Neumann

On souhaite démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Tout sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ *est une sous-variété.*

On fixe donc un groupe fermé G. On rappelle que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a été définie dans l'exercice 1 et que l'inverse locale de exp en Id a été notée l.

1. Montrer que si G est une sous-variété lisse en Id, alors c'est une sous-variété.

   Dans la suite, on cherche à montrer que G est une sous-variété lisse en Id. On fixe $\mathfrak{h}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et on définit

$$\varphi : (g, h) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \mapsto e^g e^h$$

2. (a) Justifier que φ est $\mathcal{C}^\infty$ et donner sa différentielle en 0.

   (b) On se donne alors U un voisinage de 0 tel que $\varphi : U \to \varphi(U)$ soit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme. Montrer que $\varphi(U \cap \mathfrak{g}) \subset G \cap \varphi(U)$.

3. Soit (A_n) une suite de matrices de $G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ qui converge vers Id. Soit M une valeur d'adhérence de $\left(\frac{l(A_n)}{||l(A_n)||}\right)$ (cette suite est bien définie pour n assez grand, $||\cdot||$ est une norme quelconque). Montrer que $M \in \mathfrak{g}$.

4. Montrer qu'il existe un voisinage de 0, $U' \subset U$ tel que $G \cap \varphi(U') \subset \varphi(\mathfrak{g} \cap U')$.

5. Conclure.