École Normale Supérieure
16 janvier 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Examen

Durée : 3 heures. Toutes les réponses doivent être justifiées. Les documents ne sont pas autorisés. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une très bonne note. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Notons A (respectivement B) le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant l'ensemble $\{a_n = e_{2n}/\ n \in \mathbb{N}\}$ (respectivement $\{b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1}e_{2n+1}/\ n \in \mathbb{N}\}$).

1. Justifier que A et B existent bien et que, munis de la restriction du produit scalaire de $\mathcal{H}$, ce sont des espaces de Hilbert. En donner des bases hilbertiennes. Déterminer $A \cap B$.

2. Montrer que l'application φ de $A \times B$ dans $\mathcal{H}$ qui envoie (x, y) sur $x + y$ n'est pas un homéomorphisme sur son image.

3. Montrer que $A + B$ est dense dans $\mathcal{H}$ sans être fermé.

Exercice 2

On note E l'espace de Banach $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme uniforme. Pour tout entier $n > 0$, on note c_n l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$c_n(f) = n\int_0^1 f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n).$$

1. Montrer que c_n est continue et calculer sa norme d'opérateur.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que la suite $(c_n(f))_n$ est bornée.

3. Montrer qu'il existe f continue telle que $(c_n(f))_n$ n'est pas bornée.

Exercice 3

On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. Soit $A_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A_0 dont la valeur propre λ_0 est une racine simple du polynôme caractéristique de A_0.

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de A_0 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $\lambda : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\lambda(A_0) = \lambda_0$ et pour tout $A \in U$, $\lambda(A)$ est une valeur propre de A.

2. Soit D l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A_0 - \lambda_0)$. Montrer qu' il existe un voisinage de A_0 tel que pour tout A dans ce voisinage, $\mathrm{Im}(A - \lambda(A)) \oplus D = \mathbb{R}^n$.

3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 dans U et une application $X : V \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $X(A_0) = X_0$ et pour tout $A \in V$, $X(A)$ est un vecteur propre de A de

valeur propre $\lambda(A)$. On pourra considérer l'application

$$g : U \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}(A_0 - \lambda_0) \oplus \mathbb{R}, \qquad (A, X) \to \Big(\pi\big((A - \lambda(A)).X\big), \|X\|^2 - \|X_0\|^2\Big)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et π est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ d'image $\mathrm{Im}(A_0 - \lambda_0)$.

4. On suppose que A_0 admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de A_0 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : W \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $A \in W$, $P(A)$ est inversible et $P(A)AP(A)^{-1}$ est diagonale.

Exercice 4

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E et $X : U \to E$ un champ de vecteur de classe C^1. Soit $x \in U$. On note (I_x, u_x) la courbe intégrale maximale d'origine x et $\mathcal{O} = u_x(I_x)$ la trajectoire de x. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans U est une réunion de trajectoires.

2. Montrer que si $u_x(t)$ admet une limite $y \in U$ quand t tend vers $\sup I_x$, alors $X(y) = 0$.

3. Montrons par l'absurde que si $\mathcal{O}$ est compact alors u_x n'est pas injective.
a) On suppose u_x injective et $\mathcal{O}$ compact. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_x(\mathbb{R} \setminus [-n, n])$ est un ouvert dense de $\mathcal{O}$.
b) Conclure.

Exercice 5

Soit $n > 1$ un entier, soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x, $f(x+1) = f(x)+n$. On suppose qu'il existe un réel $r > 1$ tel que pour tout x, $f'(x) \geq r$. Le but de l'exercice est de montrer que f est topologiquement conjugée à l'application $T_n : x \mapsto nx$ au sens suivant : il existe un homéomorphisme croissant α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\alpha(x + 1) = \alpha(x) + 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha = T_n.$$

On note M l'ensemble des applications β, continues et croissantes (au sens large) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\beta(x + 1) = \beta(x) + 1$. On munit M de la distance

$$d(\beta, \gamma) = \sup_{x \in [0,1]} |\beta(x) - \gamma(x)|.$$

1. Montrer que (M, d) est un espace métrique complet.

2. Montrer que f admet une réciproque g, de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Montrer que l'application $L : M \to M, (L\beta)(x) = g(\beta(nx))$ est bien définie et admet un unique point fixe α.

4. Montrer que α est strictement croissante et conclure.

5. (Bonus) Interpréter le résultat.