École Normale Supérieure 24 janvier 2018 — Topologie, analyse et calcul différentiel

Examen

Durée : 3 heures. Toutes les réponses doivent être justifiées, et concises dans la mesure du possible. Les documents ne sont pas autorisés. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une très bonne note. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On rappelle que le n-ème coefficient de Fourier de f est

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta.$$

On suppose f continuement dérivable. Calculer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$. En déduire que si f est impaire, alors

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\,d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f'(\theta)|^2\,d\theta.$$

Exercice 2

Soit n un entier ≥ 1 et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ les dérivées partielles de f et l'on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n |\partial_i f(x)|^2 = 1.$$

On note $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le champ gradient de f, défini par $Y(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, l'on a

$$f(y) - f(x) \leq \|y - x\|$$

et que si l'on a égalité, alors $y = x + \|y-x\|X(x) = x + \|y-x\|X(y)$.

Indication : On pourra intégrer de 0 à 1 la dérivée de $g(s) = f(x + s(y-x))$.

2. Soit $z \in \mathbb{R}^n$ et (I, u) la courbe intégrale maximale de Y d'origine z.

a) Montrer que $I = \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(u(t)) = f(z) + t$.

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|u(t) - z\| \leq |t|$.

d) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = z + tY(z)$. Pour cela, supposer $t \geq 0$ ou $t \leq 0$ et utiliser toutes les questions précédentes.

A partir de ce qui précède, il n'est pas dur de voir que f est une fonction affine. La preuve n'est pas demandée et ne sera pas corrigée.

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathrm{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E et $\mathrm{Gl}(E) \subset \mathrm{L}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E.

1. Soit h une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Gl}(E)$. On suppose que h est un morphisme de groupe, c'est à dire que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $h(s+t) = h(s)h(t)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{L}(E)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'on ait $h(t) = \exp(tA)$. Par conséquent, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $A = h'(0)$.

Indication : Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $B = \int_0^a h(s)\, ds$ soit inversible, puis que $h(t) = \left(\int_t^{t+a} h(s)\, ds\right) B^{-1}$ et conclure.

2. Déduire de la question précédente que pour tout $A \in \mathrm{L}(E)$, $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$.

3. On suppose E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et l'on définit pour tout $A \in \mathrm{L}(E)$, son adjoint $A^{\mathrm{t}} \in \mathrm{L}(E)$ tel que pour tout $u, v \in E$, $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^{\mathrm{t}} v \rangle$. Les isométrie de E sont les applications $B \in \mathrm{Gl}(E)$ tels que $BB^{\mathrm{t}} = \mathrm{id}_E$. Soit $A \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que

$$A + A^{\mathrm{t}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) \text{ est une isométrie})$$

Indication : dériver $t \to \langle \exp(tA)u, \exp(tB)v \rangle$.

Exercice 4

Soit n un entier ≥ 1 et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$\{f = \lambda\} := f^{-1}\big(\{\lambda\}\big), \qquad \{f < \lambda\} := f^{-1}\big(]-\infty, \lambda[\big), \qquad \{f \leq \lambda\} := f^{-1}\big(]-\infty, \lambda]\big)$$

Un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$. Un réel λ est une *valeur régulière* de f si $\{f = \lambda\}$ ne contient aucun point critique.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de f.

a) Montrer que l'intérieur de $\{f \leq \lambda\}$ est $\{f < \lambda\}$.

b) Montrer que l'adhérence de $\{f < \lambda\}$ est $\{f \leq \lambda\}$.

Indication : Pour le b), on pourra utiliser le théorème des fonctions implicites ou le théorème d'inversion locale.

Un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un *minimum strict local* de f si il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$. On suppose que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

et que f admet au moins deux minima stricts distincts a et b. Le but de ce qui suit est de montrer que f admet un point critique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$.

2. Montrer le résultat pour $n = 1$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note E_λ la réunion des parties de $\{f \leq \lambda\}$ qui sont compactes, connexes et contiennent a et b.

3. Montrer qu'il existe λ_1 tel que $E_{\lambda_1} \neq \emptyset$.

4. Montrer qu'il existe $\lambda_2 > \max(f(a), f(b))$ tel que $E_{\lambda_2} = \emptyset$.

5. Montrer que si E_λ n'est pas vide, alors il est compact et connexe.

6. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $E_M \neq \emptyset$ et pour tout $\lambda \in]-\infty, M[$, $E_\lambda = \emptyset$. Remarquer que $M > \max(f(a), f(b))$.

Nous allons montrer que f admet un point critique dans l'ensemble de niveau $\{f = M\}$. On raisonne par l'absurde et l'on suppose donc que M est une valeur régulière de f.

7. Montrer que tout point $x \in \{f = M\}$ admet un voisinage V dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V \cap \{f \leq M\}$ soit compact, connexe et $V \cap \{f < M\}$ soit connexe.

8. Montrer que $\operatorname{int} E_M = E_M \cap \{f < M\}$, où $\operatorname{int} E_M$ est l'intérieur de E_M.

9. Montrer que $\overline{\operatorname{int} E_M} = E_M$.

10. Montrer que l'intérieur de E_M est connexe.

Indication : supposer que $\operatorname{int} E_M = A \cup B$ avec A, B des ouverts disjoints non vides. Montrer qu'il existe $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap E_M$ et aboutir à une contradiction.

11. Montrer qu'il existe un chemin d'extrémités a et b contenu dans l'intérieur de E_M et conclure.