École Normale Supérieure
23 janvier 2019

Topologie, analyse et calcul différentiel

Examen

Durée : 3 heures. Toutes les réponses doivent être justifiées, et concises dans la mesure du possible. Les documents ne sont pas autorisés. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une très bonne note. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On considère le champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ indépendant du temps

$$f(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{2(1+xy)}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} \right)$$

1. A l'aide d'un résultat de cours que l'on rappellera, montrer que le champ est complet, c'est-à-dire que ses courbes intégrales maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $r \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\Big(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \Big)$$

lorsque $t \to (x(t), y(t))$ est un courbe intégrale de f. En déduire que

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| \leqslant r + 2$$

(On pourra observer que $3\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta = -\cos(3\theta)$). Donner un majoration explicite globale de $r(t)$ pour la courbe intégrale maximale de condition initiale $(x(0), y(0)) = (x, y)$ en utilisant la technique du lemme de Gronwall.

3. Montrer que les courbes intégrales de f sont contenues dans les ensembles de niveau de la fonction $g(x,y) = 2x + x^2y - \frac{1}{3}y^3$.

Exercice 2

Soit un espace vectoriel normé E de dimension $\geqslant 2$ éventuellement infinie. Soit K un compact de E tel que son complémentaire K^c ne soit pas connexe. On note $B = \{x \in E; \|x\| \leqslant 1\}$.

1. Montrer que le complémentaire de B est connexe.

2. Montrer que K^c admet une composante connexe C bornée.

3. Montrer que C est ouverte. Il existe donc $a \in C$ et $r > 0$ tel que la sphère $S(a,r) := \{x \in E / \|x - a\| = r\}$ soit contenu dans C. Montrer que l'application de K dans $S(a,r)$ qui envoie x sur $a + \frac{r}{\|x-a\|}(x-a)$ est surjective.

4. En déduire que E est de dimension finie.

5. Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, le complémentaire de tout compact est connexe.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert réel qui admet une base hilbertienne dénombrable $(e_i,\ i \in \mathbb{N})$. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire et $\|x\|$ la norme associée.

On dit d'une suite (x_n) de H qu'elle converge *faiblement* vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. On note $x_n \rightharpoonup x$ le fait que (x_n) converge faiblement vers x.
On note la convergence usuelle dans H par $x_n \to x$.

1. a) Montrer qu'une suite (x_n) de H converge vers x si et seulement si $\|x_n\| \to \|x\|$ et $x_n \rightharpoonup x$.
b) Donner une suite de H convergeant faiblement vers 0 mais ne convergeant pas vers 0.

2. Soit (x_n) une suite de H convergeant faiblement vers 0. Montrons que (x_n) est bornée. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que (x_n) n'est pas bornée.
a) Montrer que l'on peut construire une famille $(f_i,\ i \in \mathbb{N}^*)$ orthonormale et une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{\varphi(n)} \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$, $\langle x_{\varphi(n)}, f_n\rangle \geqslant n$ et pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, $\left|\langle x_{\varphi(n)}, f_i\rangle\right| \leqslant 1/n^2$.
b) Aboutir à une contradiction en considérant $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} f_i$.
c) En déduire que toute suite faiblement convergente est bornée.

3. a) Soit (x_n) une suite bornée de H telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(\langle x_n, e_i\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer alors que (x_n) converge faiblement.
b) En déduire que toute suite bornée de H admet une sous-suite faiblement convergente.

4. a) Définir une topologie sur H pour laquelle la convergence des suites est la convergence faible.
b) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur H pour laquelle la convergence des suites est la convergence faible. On pourra raisonner par l'absurde et construire dans le cas contraire une suite strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $ne_{\varphi(n)} \rightharpoonup 0$.

Exercice 4

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f est une fonction de U dans $\mathbb{R}$, on note f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} et f_{yx} les dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_1^2 f$, $\partial_2^2 f$, $\partial_1\partial_2 f$ et $\partial_2\partial_1 f$. Si A est une fonction définie sur un voisinage de $f(U)$ dans $\mathbb{R}$, l'on note $A(f)$ pour $A \circ f$.

1. Soient $a, b \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ qui vérifient $a_x b_y - a_y b_x = 0$ sur U. Supposons que $a_x(x_0, y_0) \neq 0$ pour un certain $(x_0, y_0) \in U$. Montrer alors qu'au voisinage de (x_0, y_0) on a $b = C(a)$ pour une fonction C de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de $a(x_0, y_0)$.

Indication : résoudre $a(x, y) = u$ sous la forme $x = f(y, u)$ puis montrer que $b(f(y, u), y)$ ne dépend pas de y.

2. Soit I un intervalle ouvert et $A, B \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Pour tout $t \in I$, l'on note P_t le plan affine $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ z = tx + A(t)y + B(t)\}$ et D_t la droite affine d'équation :

$$\begin{cases} z = tx + A(t)y + B(t) \\ 0 = x + A'(t)y + B'(t) \end{cases} \tag{1}$$

Soit une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que pour tout $t \in I$, $(x, y, z) = \gamma(t)$ est solution de (1) si et seulement si pour tout $t \in I$, $\gamma(t)$ appartient à P_t et $\gamma'(t)$ au plan vectoriel associé.

3. On se donne à nouveau I et $A, B \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Soit (x_0, y_0, z_0, t_0) vérifiant (1). On suppose que $A''(t_0)y_0 + B''(t_0) \neq 0$. Montrer que dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0, t_0) les solutions de (1) sont de la forme $z = f(x, y)$, $t = g(x, y)$ avec f et g des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que $f_x = g$, $f_y = A(g)$ puis que $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$.

4. On part à présent d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ qui vérifie $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$. On suppose que $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ pour un certain $(x_0, y_0) \in U$. Montrer qu'au voisinage de (x_0, y_0), $f_y = A(f_x)$ pour une fonction A bien choisie, puis que $f - x f_x - y A(f_x) = B(f_x)$ pour B bien choisie. En déduire que $(t, z, x, y) = (f_x(x, y), f(x, y), x, y)$ sont solutions de (1).