Examen de Topologie et Calcul différentiel

Les 3 exercices sont indépendants. Il n'est pas nécessaire de faire tout le sujet pour obtenir une très bonne note. Vous pourrez utiliser sans démonstration les résultats du cours ou vus en TD (*à condition, mais cela va de soi, que ce résultat n'est pas l'objet de la question)*.

- Le premier exercice étudie les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques et commence par des **questions de cours**.
- Le deuxième exercice démontre et applique le théorème des extrema liés. Ce théorème étend au cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ l'implication : Si $f : U \to \mathbb{R}$ C^1 possède un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique ($df(x_0) = 0$). Aucune notion préalable de sous-variétés n'est nécessaire : toutes les définitions utiles seront rappelées.
- Le troisième et dernier exercice s'intéresse à la complétude de l'espace des courbes non paramétrées à valeur dans un espace métrique compact.

Exercice 1 : Théorème de Floquet

Dans cet exercice, on considère une application $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ continue et T-périodique. On note $R(t, t_0) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la résolvante de l'équation différentielle

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{1}$$

i.e. $R(t_0, t_0) = \mathrm{Id}$ et $\frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

1. **Questions de cours**
   a) Montrer que pour tout $t, s, u \in \mathbb{R}$, $R(t, s)R(s, u) = R(t, u)$.
   b) En déduire que pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, $R(t, s) = R(t, 0)R(s, 0)^{-1}$.
   c) Soit $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(t) \coloneqq \det R(t, 0)$ puis une expression de $f(t)$.
2. On admet l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telle que $e^{TB} = R(T, 0)$. Montrer qu'il existe une application continue T-périodique $C : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $R(t, 0) = C(t)e^{tB}$.

Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ continue et T-périodique. On s'intéresse désormais à l'équation différentielle

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t). \tag{2}$$

3. a) Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler (sans démonstration) la formule de Duhamel qui donne la solution y de (2) telle que $y(t_0) = y_0$.
   b) En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{R}^d$ tel que pour toute solution y de (2) et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y((k + 1)T) = e^{TB}y(kT) + z$.
4. On suppose qu'il existe une solution bornée y de (2).

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $x_0 = e^{TB}x_0 + z$.
b) En déduire l'existence d'une solution périodique de (2).

Exercice 2 : Théorème des extrema liés et applications

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $g_1, \ldots, g_p : U \to \mathbb{R}$ des applications de classes C^1. On note $M = \{x \in U, g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\}$ et on fixe $a \in M$. On fera l'hypothèse suivante :

$$(dg_1(a), \ldots, dg_p(a)) \text{ est une famille libre de } (\mathbb{R}^n)^*. \tag{3}$$

On rappelle que l'on dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à M en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ C^1 telle que $\operatorname{Im}\gamma \subset M$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$. On note T_aM l'ensemble des vecteur tangents à M en a.

1. Montrer que $T_aM \subset \bigcap_{i=1}^p \ker dg_i(a)$.
2. Dans cette question, on veut montrer que $T_aM = \bigcap_{i=1}^p \ker dg_i(a)$.
   a) Soient $L_{p+1}, \ldots, L_n$ des formes linéaires telles que $(dg_1(a), \ldots, dg_p(a), L_{p+1}, \ldots, L_n)$ forme une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. On note

   $$\Phi : x \in U \mapsto (g_1(x), \ldots, g_p(x), L_{p+1}(x-a), \ldots, L_n(x-a)) \in \mathbb{R}^n$$

   Calculer sa différentielle.
   b) En déduire qu'il existe des voisinages ouverts V de a, W de 0 et $\Psi : W \to V$ un C^1 difféomorphisme tel que pour tout $x \in W$ et $i \in \{1, \ldots, p\}$, $g_i \circ \Psi(x) = x_i$.

   c) Conclure.
3. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que la restriction de f à M possède un extremum (pour fixer les idées, on suppose ici que c'est un maximum) local en a i.e. il existe un voisinage $V \subset U$ de a tel que pour tout $x \in V \cap M$, $f(x) \leq f(a)$.
   a) Montrer que $T_aM \subset \ker df(a)$.
   b) En déduire le **théorème des extrema liés** : il existe $\lambda_1 \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

   $$df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a) \tag{4}$$

4. **Une première application.** Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne.
   a) Justifier que l'application $q : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, Ax)$ est C^1 et donner sa différentielle.
   b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que

   $$q(a) = \max_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} q(x)$$

   c) Montrer que a est un vecteur propre de A.

5. **Une deuxième application.** On note $||M||^2 = \mathrm{tr}({}^tMM)$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R});\ ||M|| = \min_{A\in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} ||A||\}$$

Exercice 3 : Espace métrique des courbes non paramétrées

On considère un espace métrique compact (K, d) et on note $C = C([0, 1], K)$ l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans K, que l'on munit de la distance

$$d_\infty(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{x\in[0,1]} d(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$$

On note Φ (resp. Φ_+) l'ensemble des applications φ continues croissantes (resp. strictement croissantes) telles que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.

Pour $\gamma_1, \gamma_2 \in C$, on note

$$\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\varphi_1,\varphi_2\in\Phi} d_\infty(\gamma_1 \circ \varphi_1, \gamma_2 \circ \varphi_2)$$

Enfin, on dit que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ telles que $\gamma_1 \circ \varphi_1 = \gamma_2 \circ \varphi_2$. C'est une relation d'équivalence, ce que l'on ne demande pas de montrer. On notera $\Gamma = C/\sim$ l'espace quotient et on notera $[\gamma]$ la classe de γ.

1. Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi^2$.
   a) Montrer qu'il existe une unique application $\varphi \in \Phi$ et une unique application 1- Lipschitzienne ϑ telle que

   $$\varphi_1 = \varphi + \vartheta \circ \varphi; \quad \varphi_2 = \varphi - \vartheta \circ \varphi.$$

   b) Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in C$. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que $\delta(\gamma_1, \gamma_2) = 0 \iff \gamma_1 \sim \gamma_2$.
2. a) Justifier que Φ_+ est dense dans Φ.
   b) En déduire que $\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\varphi\in\Phi_+} d_\infty(\gamma_1, \gamma_2 \circ \varphi)$.
   c) Montrer que $\delta([\gamma_1], [\gamma_2]) = \delta(\gamma_1, \gamma_2)$ définit une métrique sur Γ. On commencera par montrer proprement que δ vérifie l'inégalité triangulaire.

Dans la suite, on cherche à montrer que (Γ, δ) est complet. Pour ce faire, on introduit les notations suivantes.

Si $\gamma \in C$, $0 \le a < b \le 1$ et $\varepsilon > 0$, on définit la subdivision $\Delta_\gamma(a, b; \varepsilon)$ de $[a, b]$ comme suit. On pose $t_0 = a$. Pour construite t_{i+1} à partir de γ on distingue différents cas :

- Si pour tout $t \in [t_i, b[, d(\gamma(t), \gamma(t_i)) < \varepsilon$, on achève la construction en posant $t_{i+1} = b$.
- Sinon, $s = \inf\{t \in [t_i, b[, d(\gamma(t), \gamma(t_i)) = \varepsilon\} < b$ existe. Dans ce cas, on pose : $t_{i+1} = \sup\{t \in [s, b], \gamma(t) = \gamma(s)\}$.

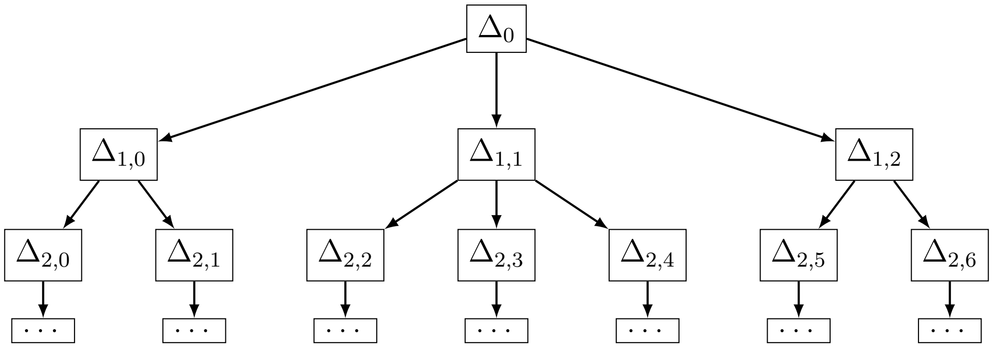

FIGURE 1 – Dans cet exemple, $P_0 = 2$, $P_1 = 6$. La subdivisions Δ_q est obtenue en réunissant les subdivisions $\Delta_{q,i}$, $0 \leq i \leq P_{q-1}$.

Ceci construit une subdivision $\Delta_\gamma(a, b; \varepsilon)$.

3. a) Vérifier que le processus de construction s'achève.
   b) Montrer que si $\gamma \in C$ et $\varphi \in \Phi$, on a

$$\varphi\Big(\Delta_{\gamma\circ\varphi}(a, b; \varepsilon)\Big) = \Delta_\gamma(\varphi(a), \varphi(b); \varepsilon)$$

   et que ces deux subdivisions ont même cardinal (ce qui pourrait ne pas être le cas si deux points successifs $\Delta_{\gamma\circ\varphi}(a, b; \varepsilon)$ ont même image par φ).

On définit ensuite, pour $\gamma \in C$, une suite croissante $(\Delta_q(\gamma))$ de subdivisions de $[0, 1]$ par récurrence : $\Delta_0(\gamma) = \Delta_\gamma(0, 1; 1)$ et si $\Delta_{q-1}(\gamma) = \{t_0 < \cdots < t_p\}$, on pose :

$$\Delta_{q,i}(\gamma) = \Delta_\gamma(t_i, t_{i+1}; 2^{-q})$$
$$\Delta_q(\gamma) = \bigcup_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \Delta_{q,i}(\gamma)$$

On obtient ainsi la structure arborescente suivante de la figure 1.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on notera $P_q(\gamma) = |\Delta_q(\gamma)| - 1$, et pour $p \in \{0, \ldots, P_q(\gamma)\}$, $x_{p,q}(\gamma) = \gamma(t_p)$ où l'on a écrit $\Delta_q(\gamma) = \{t_0 < \cdots < t_{P_q(\gamma)}\}$,

4. a) Vérifier que $P_q(\gamma) < +\infty$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. On fixe $\delta_q > 0$ tel que $|t - s| \leq \delta_q \implies d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq 2^{-q-1}$. Estimer $P_q(\gamma)$ en fonction de δ_q.
   b) Montrer que si $\gamma_1 \sim \gamma_2$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $P_q(\gamma_1) = P_q(\gamma_2)$ et pour tout $0 \leq p \leq P_q(\gamma_1)$, $x_{p,q}(\gamma_1) = x_{p,q}(\gamma_2)$.

Dans la suite, on considère $([\gamma_n])_n$ une suite de Cauchy de (Γ, δ) et on veut montrer qu'elle converge.

5. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(P_q(\gamma_n))_n$ est bornée.
6. Montrer qu'il existe une extraction $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - pour tout $q \in \mathbb{N}$, $P_q(\gamma_{n_k})$ est constante égale à P_q.
   - pour tout $q \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \ldots, P_{q-1}\}$, $(|\Delta_{q,i}(\gamma_{n_k})|)_k$ est constante.
   - pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq P_q$, $(x_{p,q}(\gamma_{n_k}))_k$ converge. On note $x^\star_{p,q}$ cette limite.
7. En utilisant les questions précédentes, construire une courbe $\gamma^\star \in C$ et une suite $(\varphi_{n_k})_k \in \Phi_+^{\mathbb{N}}$ telle que $d_\infty(\gamma_{n_k} \circ \varphi_{n_k}, \gamma^\star) \to 0$. Conclure.