TD 10 : Théorème d'inversion locale et des fonctions implicites

Vous trouviez que ça manquait de personnages féminins ? Moi aussi. Alors pour ce TD, un petit texte sur une mathématicienne géniale décédée bien trop tôt des suites d'un cancer du sein.
Maryam Mirzakhani (1977 - 2017) est une mathématicienne iranienne. Diplômée de Harvard et professeure à Stanford, ses travaux en dynamique et en géométrie des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules lui ont apporté une renommée internationale et une récompense de premier plan : c'est la première (et à ce jour la seule) femme récompensée par la médaille Fields. C'était en 2014. Les mots de l'IMU à l'occasion de sa remise de prix parlent pour elle : " *elle incarne un équilibre rare entre des performances techniques superbes, une audacieuse ambition, une vision qui porte loin et une curiosité profonde.*"

Exercice 1 : Echauffement

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, a, b) = x^2 - 2ax + b$.

1. Soit $(x_0, a_0, b_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, a_0, b_0) = 0$. A quelle condition sur (x_0, a_0, b_0) existe-t-il un voisinage de ce point U, un voisinage V de (a_0, b_0) et $g : V \to \mathbb{R}$ telle que les solutions de $f(x, a, b) = 0$ dans U soient données exactement par les $(g(a, b), a, b)$ pour $(a, b) \in V$.

2. Cette condition définit une courbe tracée sur la surface d'équation $f(x, a, b) = 0$. Quelle est l'équation de cette courbe quand on la projette sur le plan $x = 0$. Interpréter. Esquisser la surface $f(x, a, b) = 0$.

Exercice 2 : Inversion globale

Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$||f(x) - f(y)|| \geq k||x - y||$$

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert puis que f est surjective, et enfin que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Exercice 3 : Forme normale des submersions

Soit $1 \leq p \leq n$ deux entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 telle que $df(a)$ est surjective (on dit que f est une submersion en a).On suppose de plus que $f(a) = 0$. On souhaite démontrer le résultat suivant : il existe un C^1-difféomorphisme $\varphi : V \to W$ entre un voisinage $V \subset U$ de a et un voisinage $W \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tel que $\varphi(a) = 0$ et

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$$

1. Montrer qu'il existe une permutation des coordonnées σ tel que si l'on note $b = \sigma(a)$, $U_1 = \sigma(U)$ et $g = f \circ \sigma^{-1} : U_1 \to \mathbb{R}^p$, alors la matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(b)\right)_{1 \leq i \leq j \leq p}$ est inversible,.
2. On définit
$$G : x = (x_1, \dots, x_n) \in U_1 \mapsto (g_1(x), \dots, g_p(x), x_{p+1} - b_{p+1}, \dots, x_n - b_n) \in \mathbb{R}^n$$
Montrer que $dG(b)$ est inversible.
3. Conclure.

Exercice 4 : Lemme de Morse

On commence par rappeler le théorème suivant de réduction des formes quadratiques réelles. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille n et on note (X, Y) le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Il existe un unique entier $p \in \{0, n\}$, appelé signature de A, et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (non unique) tel que*

$$A = {}^tP \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & O \\ O & -\mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix} P$$

En outre, p peut être obtenu par la formule

$$p = \max\{\dim F; F \subset \mathbb{R}^n, \forall X \in F \setminus \{0\}, (AX, X) > 0\}$$

1. On fixe dans cette question $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible et on définit une application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ par
$$f(M) = {}^tMA_0M$$
   a) Montrer que f est différentiable et calculer $df(\mathrm{I}_n)$.
   b) Déterminer $\ker df(\mathrm{I}_n)$ et $\operatorname{Im} df(I)$.
   c) Montrer qu'il existe un voisinage U de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : U \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $\varphi(A_0) = \mathrm{I}_n$ et pour tout $A \in U$,
$$A = {}^t\varphi(A)A_0\varphi(A)$$
   d) En déduire que si $p \in \{0, \dots n\}$, l'ensemble des matrices symétriques inversibles de signature p est ouvert dans $S_n(\mathbb{R})$.
2. **Le lemme de Morse.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^p, $p \geq 3$. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. On suppose enfin que la matrice Hessienne de f en $0, D^2f(0)$, est inversible et de signature p.

a) Montrer qu'il existe $A : U \to S_n(\mathbb{R})$, dont on précisera la valeur en 0, de classe C^{p-2} telle que pour tout $x \in U$,

$$f(x) = (A(x)x, x)$$

b) En utilisant la question 1, montrer qu'il existe un voisinage de 0, $V \subset U$ et $M : V \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^{p-2} tel que pour tout $x \in V$, $A(x) = {}^tM(x)A(0)M(x)$.

c) Montrer que $x \in V \mapsto M(x)x$ est un C^{p-2} difféomorphisme local en 0.

d) En utilisant de plus le théorème rappelé en introduction, déduire des questions précédentes le lemme de Morse : il existe un C^{p-2} difféomorphisme φ entre deux ouverts W_1 et W_2 de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall y \in W_2$,

$$f \circ \varphi^{-1}(y) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2$$

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Forme locale des immersions et théorème du rang constant

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que $df(a)$ est injective (on dit dans ce cas que f est une immersion en a). Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de $f(a)$, un ouvert W de $\mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme $\varphi : V \to W$ tels que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ vérifiant $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots 0) \in W$,

$$\varphi \circ f(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in U$, le rang de $df(x)$ est constant égal à r. Soit $a \in U$. Montrer qu'il existe
   - Un voisinage ouvert V de 0, un voisinage ouvert V' de a et un C^1-difféomorphisme $\varphi : V \to V'$ tel que $\varphi(0) = a$;
   - Un ouvert W de $\mathbb{R}^m$ contenant $f(\varphi(V))$, un ouvert W' de $\mathbb{R}^p$ et un C^1-difféomorphisme $\psi : W \to W'$

   tels que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$,

$$\psi \circ f \circ \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

Exercice 6 : Hypersurfaces et équation eikonale

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ C^2. On considère l'hypersurface qui est le graphe de g : $S = \{(t, g(t)), t \in V\}$. Sans perte de généralité, on supposera $g(0) = 0$.

1. a) Si $a \in S$, on définit le plan tangent à S en a par

$$T_aS := \{v \in \mathbb{R}^n ; \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^1 \text{ tel que } \mathrm{Im}(\gamma) \subset S, \gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

Montrer que si $a = (t, g(t))$, alors on a la description suivante de T_aS :

$$T_aS = \mathrm{Vect}\left(e_i + \frac{\partial g}{\partial t_i}(t)e_n, 1 \leq i \leq n-1\right)$$

b) En déduire qu'il existe une application C^1, $N : V \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $t \in V$,

$$||N(t)|| = 1 \text{ et } \forall v \in T_{(t,g(t))}S, (v, N(t)) = 0$$

Autrement dit, $N(t)$ est un vecteur normal à S en $(t, g(t))$.

2. a) Montrer que l'application $F(t,u) \in V \times \mathbb{R} \mapsto (t, g(t)) + uN(t)$ est un difféomorphisme local en 0.

   b) On suppose donc que $F : U \to W$ est un difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0. On note $x \in W \mapsto (t(x), u(x))$ la réciproque que F sur W. Montrer que pour tout $x \in W$,

   $$\nabla u(x) = N(t(x))$$

   c) En déduire que $u : W \to \mathbb{R}^n$ est solution de l''équation eikonale $||\nabla u||^2 = 1$.

3. **D'où vient l'équation eikonale ?** On cherche une solution de $\Delta v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ de la forme $v(t,x) = a(x)e^{ik(u(x)-t)}$.

   a) Montrer que $v(t,x)$ est solution de $\Delta v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ si et seulement si

   $$\Delta \left(a(x)e^{iku(x)}\right) + k^2 a(x) e^{iku(x)} = 0$$

   b) Montrer que

   $$\Delta \left(a(x)e^{iku(x)}\right) = \left((\Delta a)(x) + ik\left(2\nabla a(x) \cdot \nabla u(x) + a(x)\Delta u(x)\right) - k^2 a(x)||\nabla u(x)||^2\right) e^{iku(x)}$$

   c) Montrer que l'équation eikonale apparaît naturellement dans la limite des hautes fréquences $k \to +\infty$. Interpréter dans ce cadre les surfaces $u = \textit{constante}$.

Exercice 7 : Régularité des valeurs propres simples (Examen 2016)

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A_0 pour la valeur propre λ_0, **racine simple** du polynôme caractéristique de A.

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de A_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $\lambda : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\lambda(A_0) = \lambda_0$ et pour tout $A \in U$, $\lambda(A)$ est une valeur propre de A.
2. Soit D l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A_0 - \lambda_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage de A_0 tel que pour tout A dans ce voisinage, $\mathrm{Im}(A - \lambda(A)) \oplus D = \mathbb{R}^n$.
3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 dans U et une application $X : V \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $X(A_0) = X_0$ et pour tout $A \in V$, $X(A)$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda(A)$. On pourra considérer l'application

   $$g : U \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}(A_0 - \lambda_0) \times \mathbb{R}, \qquad (A, X) \to \Big(\pi\big(AX - \lambda(A)X\big), \|X\|^2 - \|X_0\|^2\Big)$$

   où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et π est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ d'image $\mathrm{Im}(A_0 - \lambda_0)$.
4. On suppose que A_0 admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de A_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : W \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $A \in W$, $P(A)$ est inversible et $P(A)AP(A)^{-1}$ est diagonale.