TD 11 : Equations différentielles ordinaires

Rudolf Lipschitz (1832-1903) est un mathématicien allemand. C'est lui qui introduit les fonctions qui portent son nom, quand il améliora les conditions de Cauchy d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires. Ses travaux ont par ailleurs couvert plusieurs branches des mathématiques (théorie des nombres, géométrie différentielle, entre autres).

Exercice 1 : Sur la divergence

Si $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on rappelle que l'opérateur de divergence est défini par :

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i = \operatorname{tr} d_x f$$

Soit ϕ^t le flot associé à une équation différentielle $u' = f(t, u)$ sur $\mathbb{R}^n$, avec $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f vérifie :

$$\operatorname{div}_x f(t, x) = 0 \quad \forall t, x$$

1. Montrer alors que la différentielle du flot par rapport à x est de déterminant 1. (on pourra utiliser la différentielle du déterminant : si M est inversible $d_M(\det)(H) = \det(M) \operatorname{tr}(HM^{-1})$).
2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. En déduire que $Vol(\phi^t(\Omega))$ est constant. Autrement dit, le flot d'une champ de vecteur à divergence nulle préserve les volumes.

Exercice 2 : Redressement des champs de vecteurs

Dans cet exercice, on appellera champ de vecteurs sur U toute application $X : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Si X est un champ de vecteur sur U, on notera φ_X le flot de l'équation différentielle associée $y' = X(y)$.

Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, on définit un champ de vecteur sur U à partir d'un champ de vecteur X sur V, le tiré en arrière, aussi appelé pullback par les anglo-saxons,

$$(f^* X)(u) = \left[d_{f(u)} f^{-1}\right] X(f(u))$$

1. Relier le flot φ_X défini sur V au flot φ_{f^*X} défini sur U.

2. Soit X un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $X(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de x_0, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un C^1 difféomorphisme tels que $f^*X = e_1$ sur U.

Exercice 3 : Equation de transport

Soit $A(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée. Soit $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t f(t,x) + A(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0 \\ f|_{t=0} = f_0 \end{array} \right.$$

où l'inconnue est une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout x il existe une unique fonction $X_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telle que
$$X_x'(t) = A(t, X_x(t))$$
et $X_x(0) = x$.
2. Supposons que f soit solution du problème. Montrer que si x est fixé, $t \mapsto g(t) := f(t, X_x(t))$ est constante.
3. Montrer que $\Psi : (t,x) \mapsto (t, X_x(t))$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans lui-même.
4. En déduire que si f est solution, $f = f_0 \circ \Psi^{-1}$ (où l'on prolonge f_0 naturellement par $f_0(t,x) = f_0(x)$) et conclure quant à l'existence et l'unicité des solutions.

Exercice 4 : Théorème de Hadamard

Ce théorème énonce que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il y a équivalence entre :

(i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

(ii) f est propre* et $df(x)$ est inversible pour tout x.

[*On dit qu'une application est propre si l'image réciproque d'un compact est un compact.]

On veut démontrer l'équivalence précédente dans le cas où f **est de classe $\mathcal{C}^2$.**

1. Montrer que (i) implique (ii).
   On suppose désormais (ii).
2. Montrer que f est surjective.
3. Soit $z \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé dans la suite de l'énoncé. Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(z)\}$ est fini.
4. Montrer que les solutions du système différentiel
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -(df(x))^{-1} \cdot \big(f(x) - f(z)\big) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$
sont bien définies sur $[0, +\infty[$. (On pourra calculer la dérivée de $t \mapsto f(x(t))$ et utiliser la propreté de f.)
5. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in S$ tel que $x(t) \to y$ quand $t \to +\infty$.
6. Montrer que f est injective puis conclure.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Equation de Hill-Mathieu

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, paire et π-périodique. On va étudier l'équation différentielle

$$(E) : y'' + qy = 0$$

On note S l'espace des solutions de (E). On sait qu'il est de dimension 2. On fixe y_1, y_2 deux solutions telles que

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_1'(0) = 0, y_2'(0) = 1$$

1. On note
$$w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$
Montrer que pour tout t, $w'(t) = 1$. En déduire que (y_1, y_2) est une base de S.
Dans la suite, on considère l'application $u : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f(\cdot + \pi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
2. a) Montrer que $u(S) = S$.
On identifie l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(S)$ à sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base (y_1, y_2).
b) Exprimer a, b, c et d en fonction de y_1 et y_2. En déduire que $\det u = 1$.
c) Que dire de la parité de y_1 et y_2 ?.
d) En étudiant u^{-1}, montrer que $a = d$.
3. On note $T = \operatorname{tr}(u) = a + d = 2a$.
a) Donner l'expression du polynôme caractéristique de u.
b) On suppose que $|T| > 2$, montrer qu'aucune solution non triviale de (E) n'est bornée.
c) On suppose que $|T| < 2$, montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées.
d) On suppose que $T = 2$. Montrer qu'il existe une solution π-périodique non identiquement nulle, donc bornée.
e) On suppose que $T = -2$. Montrer qu'il existe des solutions 2π-périodique non identiquement nulles, donc bornées.

Exercice 6 : Systèmes Hamiltoniens

Soit $f : (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \to f(x, \xi) \in \mathbb{R}$ de classe C^2. On définit le champ de vecteurs Hamiltonien associé à f par

$$H_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

1. a) Soit $(x_0, \xi_0) \in \Omega$. Montrer que le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'(t) = H_f(\rho(t)) \\ \rho(0) = (x_0, \xi_0) \end{array} \right. \iff \rho(t) = (x(t), \xi(t)) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} x_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\rho(t)) \\ \xi_i'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(\rho(t)) \\ \rho(0) = (x_0, \xi_0) \end{array} \right. \qquad (1)$$

admet une unique solution maximale. On parle du système Hamiltonien associé à f.

b) Montrer que si $\rho : I \to \mathbb{R}^{2n}$ est une solution de (1), alors $f(\rho(t)))$ est constante.

c) Soit $E \in \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(E)$ est compacte et (x_0, ξ_0) tel que $f(x_0, \xi_0) = E$. Montrer que la solution (1) de données initiales (x_0, ξ_0) est globale.

2. **Des exemples.**

a) On suppose que $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2. Montrer que si f est de la forme $f(x, \xi) = \frac{1}{2}||\xi||_2^2 + V(x)$, alors 1 est équivalente aux équations de Newton pour une particule évoluant dans un potentiel V.

b) On suppose que V est confinant i.e. $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$, montrer que si f est de la forme $f(x, \xi) = \frac{1}{2}||\xi||_2^2 + V(x)$, alors toute les solutions sont globales.

c) On suppose que $n = 1$, que $V(x) = 1 - \cos x$ et que f est de la forme $f(x, \xi) = \frac{1}{2}||\xi||^2 + V(x)$. Montrer que toutes les solutions sont globales.

3. On se place dans le cas $n = 1$. Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $df(x_0, \xi_0) \neq 0$.

a) Montrer que $f^{-1}(E)$ est une hypersurface (variété de dimension $2n - 1 = 1$) lisse en (x_0, ξ_0).

b) On suppose par exemple qu'il existe I un voisinage de x_0, J de ξ_0 et $\phi : I \to J$ tel que pour tout $(x, \xi) \in I \times J$,

$$f(x, \xi) = E \iff \xi = \phi(x)$$

Obtenir une EDO vérifiée par x. On dit dans ce cas que le système Hamiltonien est complètement intégrable. En dimension quelconque, ramener un système Hamiltonien à un système de n-EDO n'est pas toujours possible. Cela repose sur l'existence de n-intégrales premières indépendantes. On donne ici un exemple important de force centrale en dimension 2.

4. On suppose que $V(x)$ est C^2 et de la forme $V(x) = v(r^2)$ où $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. On étudie toujours le système Hamiltonien associé à f. On rappelle que $f(x, \xi) = \frac{1}{2}||\xi||^2 + V(x)$ est une intégrale première du système i.e. f est constante le long des trajectoires du flot. Montrer que $g(x, \xi) = x_1\xi_2 - x_2\xi_1$ est une intégrale première du système.