TD 12 : EDO. Stabilité des solutions.

Alexandre Lyapounov (1857 - 1918) est un mathématicien russe. Il a grandement contribué à l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques, dont celle des solutions des équations différentielles. Les fonctions de Lyapounov, utiles pour caractériser la stabilité de solutions, lui doivent leur nom.

On utilisera les définitions de stabilité suivantes.

Soit $U \subset \mathbb{R}^{1+d}$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ satisfaisant les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz et soit $(t_0, z_0) \in U$ tel que le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = z_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

possède une solution $y(t, z_0)$ définie sur $[t_0, +\infty[$. On note également $y(t, z)$ les solutions maximales de (1) tels que $y(t_0, z) = z$.

Définition. *On dit que la solution $y(t, z_0)$ est :*

- *stable (au sens de Lyapounov) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in B(z_0, \delta)$, $y(t, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ et $||y(t, z_0) - y(t, z)|| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.*
- *asymptotiquement stable si elle est stable et si*

$$\lim_{t \to +\infty} ||y(t, z_0) - y(t, z)|| = 0$$

Exercice 1 : Ne pas se fier aux apparences

On considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

1. Vérifier que 0 est un point critique du système. Calculer le linéarisé en 0 et esquisser les courbes intégrales de ce système linéarisé.
2. a) Montrer qu'en coordonnées polaires (r, θ) le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = -r^3 \\ \theta' = 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

b) En déduire que toutes les solutions convergent vers 0.
c) Esquisser les courbes intégrales de ce système.

Exercice 2 : Stabilité pour des systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On considère le système linéaire $Y' = AY$. On étudie la stabilité de la solution nulle.

1. Montrer que 0 est asymptotiquement stable si et seulement les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.
2. Montrer que 0 est stable si et seulement les valeurs propres de A sont de partie réelle négative et que pour tout $\lambda \in Spec(A) \cap i\mathbb{R}$, $\ker(A - \lambda I_d)^d = \ker A - \lambda I_d$.
3. Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in S_d(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}, (A(t)y, y) \leq \alpha ||y||_2^2$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ une solution du système linéaire $y' = A(t)y$. Montrer que pour tout $t \geq t_0$,
$$||y(t)||_2 \leq e^{\alpha(t-t_0)} ||y(t_0)||_2$$
En déduire une condition suffisante de stabilité (resp. stabilité asymptotique) sur α.

Exercice 3 : Examen Janvier 2021 - Théorème de Floquet

Dans cet exercice, on considère une application $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ continue et T-périodique. On note $R(t, t_0) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ la résolvante de l'équation différentielle
$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{3}$$
i.e. $R(t_0, t_0) = \text{Id}$ et $\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$.

1. **Questions de cours**
   a) Montrer que pour tout $t, s, u \in \mathbb{R}$, $R(t, s)R(s, u) = R(t, u)$.
   b) En déduire que pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, $R(t, s) = R(t, 0)R(s, 0)^{-1}$.
   c) Soit $M \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$. Calculer la différentielle de det en M. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(t) \coloneqq \det R(t, 0)$ puis une expression de $f(t)$.
2. On admet l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ telle que $e^{TB} = R(T, 0)$. Montrer qu'il existe une application continue T-périodique $C : \mathbb{R} \to \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $R(t, 0) = C(t)e^{tB}$.

Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$ continue et T-périodique. On s'intéresse désormais à l'équation différentielle
$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t). \tag{4}$$

3. a) Soit $y_0 \in \mathbb{C}^d$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler (sans démonstration) la formule de Duhamel qui donne la solution y de (4) telle que $y(t_0) = y_0$.
   b) En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}^d$ tel que pour toute solution y de (4) et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y((k+1)T) = e^{TB}y(kT) + z$.
4. On suppose qu'il existe une solution bornée y de (4).
   a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{C}^d$ tel que $x_0 = e^{TB}x_0 + z$.
   b) En déduire l'existence d'une solution périodique de (4).

Pour aller plus loin

Exercice 4 : Exemple d'un linéarisé nul

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

1. En posant $z = x + iy$, calculer la solution du système de donnée initiale z_0.
2. En déduire que les courbes intégrales sont :
   - 0,
   - Les demi-droites de l'axe des abscisses ;
   - Les cercles passant par l'origine et centré sur l'axe des ordonnées
3. Quelles solutions convergent vers 0 ? Que se passe-t-il si $z_0 \in]0, +\infty[$? La solution nulle est-elle une solution stable ?

Exercice 5 : Fonctions de Lyapunov

On étudie dans cet exercice le système autonome $y' = f(y)$ où $f : U \to \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne et U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant 0. On suppose que $f(0) = 0$ et on cherche à comprendre la stabilité de la solution nulle. On note $\varphi_t(x)$ le flot de cette équation.

On dira qu'une fonction $E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est un *candidat de Lyapounov* si $E(0) = 0$ et s'il existe $r > 0$ telle que $E(x) > 0$ pour tout $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$.

Si E est un candidat de Lyapounov C^1, on note $\dot{E}(x) = dE(x) \cdot (f(x))$.

1. Soit E un candidat de Lyapounov C^1. On suppose que pour tout $x \in B(0, r)$, $\dot{E}(x) \leq 0$. (On dit que E est une *fonction de Lyapounov*). Montrer que 0 est une solution stable.
2. Soit E un candidat de Lyapounov C^1. On suppose que pour tout $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$, $\dot{E}(x) < 0$. (On dit que E est une *fonction de Lyapounov stricte*) On fixe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \bar{B}(0, \delta)$ et $t \geq 0, ||\varphi^t(x)|| \leq \varepsilon$.
   a) Montrer que pour tout $x_0 \in B(0, \delta)$, il existe $l(x_0)$ telle que $E(\varphi^t(x_0)) \to l(x_0)$ quand $t \to +\infty$.
   b) Montrer que $l(x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in B(0, \delta)$.
   c) En déduire que 0 est asymptotiquement stable.
3. **Application : cas d'un système linéaire**. Dans cette question, on suppose que $f(y) = Ay$ avec $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
   a) On suppose qu'il existe $P \in S_d^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $Q \in S_d(\mathbb{R})$ positive (resp. définie positive) telles que ${}^tAP + PA = -Q$. Montrer que 0 est une solution stable (resp. asymptotiquement stable).
   b) Retrouver les résultats de la question 1 de l'exercice 2. *On pourra regarder* $P = \int_0^{+\infty} e^{t\,{}^tA} Q e^{tA} dt$

Exercice 6 : Perturbation de systèmes linéaires

Dans cet exercice, $||\cdot||$ désignera une norme sur $\mathbb{R}^d$ aussi bien que la norme d'opérateur associée.

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ continue et une perturbation $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue, localement Lipschitzienne en y, telle que $g(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. On étudie l'équation différentielle

$$y' = A(t)y + g(t, y) \tag{5}$$

C'est un perturbation de $y' = A(t)y$, dont on note $R(t, t_0)$ la résolvante. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

(i) $\frac{||g(t,y)||}{||y||} \to 0$ quand $||y|| \to 0$, uniformément en t.

(ii) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $||R(t, t_0)|| \leq e^{-\alpha(t-t_0)}$

On souhaite montrer que sous ces hypothèses, 0 reste une solution asymptotiquement stable du système perturbé.

1. Soit I un intervalle, $t_0 \in I$ et $y : I \to \mathbb{R}$ continue. Vérifier l'équivalence suivante : y est solution de $y' = A(t)y + g(t, y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ si et seulement si pour tout $t \in I$,
$$y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)g(s, y(s))ds$$

2. On fixe $k > 0$ et $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(0, r)$ et $t \in \mathbb{R}$, $||g(t, y)|| \leq k||y||$. On suppose que y est une solution de (5) définie sur $[t_0, t_1[$ et vérifiant $y([t_0, t_1[) \subset B(0, r)$.
   a) Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_1[$,
   $$e^{\alpha t}||y(t)|| \leq e^{\alpha t_0}||y(t_0)|| + k\int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}||y(s)||ds$$
   b) En déduire que pour tout $t \in [t_0, t_1[$, $||y(t)|| \leq e^{-(\alpha-k)(t-t_0)}||y(t_0)||$.

3. Montrer que 0 est une solution asymptotiquement stable.

4. **Application.** On suppose que le système est autonome $y' = f(y)$ avec $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ C^1. On suppose que $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est un point critique de f i.e. $f(y_0) = 0$. Quitte à translater, on supposera $y_0 = 0$. On suppose enfin que $Spec(df(0)) \subset \{z; \Re(z) < 0\}$.
   a) Rappeler ce que vaut $R(t, t_0)$ quand $A(t) = A$ est constante. En déduire que si $Spec(A) \subset \{z; \Re(z) < 0\}$, alors $R(t, t_0)$ vérifie (ii).
   b) Montrer que 0 est asymptotiquement stable.