TD 2 : Espaces topologiques

Kazimierz Kuratowski (1896-1980) est un mathématicien polonais. On lui doit l'axiomatisation actuelle des espaces topologiques, fruit d'un long cheminement depuis la notion de limite (Euler, Lagrange) jusqu'aux espaces métriques (Fréchet). Parmi ses autres contributions majeures, on peut citer son théorème sur les graphes planaires ou une démonstration du lemme de Zorn (aussi connu sous le nom de lemme de Kuratowski-Zorn). Avec des collègues polonais, il a aussi grandement étudié certains espaces topologiques, qu'ils nommèrent "espaces polonais".

Exercice 1 : Echauffement

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, proposez une modification qui permet de la rendre vraie. On considère dans tout l'exercice $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{R})$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application quelconque.

1. On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète. Alors f est continue.
2. On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie grossière. Alors f est continue.
3. On suppose que f est séquentiellement continue. Alors f est continue.
4. On suppose que X et Y sont des espaces vectoriels et que les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ proviennent de normes $||\cdot||_X$ et $||\cdot||_Y$. Alors f est continue si et seulement il existe $C > 0$ tel que si pour tout $x \in X$, $||f(x)||_Y \leq C||x||_X$.

Exercice 2 : Axiomes de fermeture de Kuratowski

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Rappeler pourquoi l'adhérence vérifie les propriétés suivantes :

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A},\ A \subset \overline{A},\ \overline{\emptyset} = \emptyset,\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. Réciproquement, on se donne une application $A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$ vérifiant les quatre propriétés ci-dessus. Montrer qu'elle permet de définir une topologie sur X dont elle est l'adhérence.

Exercice 3 : Topologie cofinie

Soit X un ensemble infini. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini et $\mathcal{C}$ la réunion $\mathcal{C}_0 \cup \{\emptyset\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X.

2. Montrer que deux ouverts non vides sont toujours d'intersection non vide. Cette topologie est-elle séparée (séparée = Hausdorff = T2) ?
3. Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de X telle que pour tout $y \in X$, $\{n \in \mathbb{N} | x_n = y\}$ est fini. Montrer que pour tout $x \in X, x_n \to x$.
4. Soit Y un espace métrique et $f : X \to Y$ continue. Montrer que f est constante.

Exercice 4 : Topologie définie par une famille de semi-normes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition. On dit qu'une application $p : E \to \mathbb{R}$ est une semi-norme sur E si :

- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (inégalité triangulaire)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (homogénéité)

On se donne une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ sur E et on définit une topologie $\mathcal{T}$ sur E comme suit : on dit qu'un ensemble $U \subset E$ est ouvert si $(\star)$:

pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ et $B \subset A$ **fini** tel que
$B(x, B, r) \coloneqq \{y \in E | \forall b \in B, p_b(x - y) < r\} \subset U$.

Partie I — Généralités

1. Montrer que $(\star)$ définit effectivement une topologie et que les $B(x, B, r)$ en forment une base d'ouverts.
2. Montrer que cette topologie confère à E une structure d'espace vectoriel topologique, i.e. les applications : $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda x \in E$ et $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ sont continues.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in A$, p_α est continue.
4. Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est séparé si et seulement la condition de séparation suivante est vérifiée (on dit que (p_α) est séparante) :
$$\forall x \in E, (\forall \alpha \in A, p_\alpha(x) = 0) \implies x = 0$$
5. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$. Montrer que $x_n \to x \iff \forall \alpha \in A, p_\alpha(x_n - x) \to 0$
6. Soit $(F, \mathcal{T}')$ un espace vectoriel topologique défini par une famille de semi-normes $(q_\beta)_{\beta\in B}$. Soit $T : E \to F$ **linéaire**. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
   i. T est continue.
   ii. T est continue en 0
   iii. $\forall \beta \in B, \exists C > 0, \exists I \subset A$ fini $, \forall x \in E, q_\beta(T(x)) \leq C \sup_{i\in I} p_i(x)$

Partie II — Exemples

1. On suppose que $A = \mathbb{N}$ et que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est séparante. Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est métrisable.
Indication : on pourra considérer $d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(p_n(x-y),1)}{2^n}$

2. On suppose que $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On considère la famille de semi-normes $(p_x)_{x\in[0,1]}$ où
$$p_x : f \in E \mapsto |f(x)|$$
   a) Caractériser les suites convergentes. Cette topologie est-elle séparée ?
   b) Cette topologie est-elle métrisable ?
3. On suppose que $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère la famille de semi-normes $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ où
$$p_j : f \in E \mapsto \sup_{x\in[-j,j]} |f(x)|$$
   a) Soit $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$. Montrer que $f_n \to f$ pour cette topologique si et seulement si f_n converge uniformément vers f sur tout compact.
   b) Cette topologie est-elle métrisable ? Cette topologie est-elle normable ?

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Topologie codénombrable

Soit X un ensemble non dénombrable. On note $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire dénombrable et $\mathcal{D}$ la réunion $\mathcal{D}_0 \cup \{\emptyset\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. Cette topologie est-elle séparée ?
2. Soit $x \in X$. Existe-t-il une base dénombrable de voisinage de x ?
3. a) Montrer que tout suite convergente à valeurs dans X est stationnaire.
   b) On suppose que $X = \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{D}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séquentiellement continue, mais n'est pas continue.

Exercice 6 : Partiel 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0, 0)$ à $(1, 1/n)$ et L_∞ le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0, 0)$ à $(1, 0)$. Soit L la réunion des L_n pour $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On munit chaque L_n de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties O de L telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $O \cap L_n$ est un ouvert de L_n.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur L. Comparer $\mathcal{T}$ avec la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. $(L, \mathcal{T})$ est-il séparé ?
3. Montrer que $(L, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable. Indication : on raisonne par l'absurde ; étant donnée une distance d de L engendrant $\mathcal{T}$, construire une suite (x_n) telle que $x_n \in L_n - \{(0, 0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n) tend vers $(0, 0)$ dans (L, d) mais pas dans $(L, \mathcal{T})$.

Exercice 7 : Topologie de Fort

Soient X un ensemble infini et $x \in X$. On définit $\mathcal{T}$ comme étant l'ensemble des parties A de X telles que ou bien A^c est fini (type 1), ou bien A^c est infini et $x \in A^c$ (type 2).

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
2. Montrer que cette topologie est séparée.
3. On suppose que X est dénombrable. On considère $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite. Montrer que A et X sont homéomorphes. En déduire que X est métrisable.
4. On suppose X non dénombrable. Montrer que $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable.