TD 3 : Notions de base en topologie

Pavel Urysohn (1898-1924) est un mathématicien russe connu pour ses travaux en topologie et en théorie de la dimension. Il donne son nom au lemme d'Urysohn. Il fut l'élève de Nikolai Lusin. Il se noya malheureusement très jeune au large de Batz, dans le Finistère, où sa dépouille repose.

Exercice 1 : Echauffement

1. Un espace topologique X est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.
   Il est à *base dénombrable de voisinages* (first countable en anglais) si tout point admet une base dénombrable de voisinages.
   Il est à *base dénombrable d'ouverts* (second countable en anglais) s'il existe une base dénombrable d'ouverts pour la topologie.
   a) Montrer que si X est à base dénombrable d'ouverts, il est séparable et à base dénombrable de voisinages.
   b) Montrer qu'un espace métrique est à base dénombrable de voisinages. Montrer qu'un espace métrique séparable est à base dénombrable d'ouverts.
2. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques. On considère un ensemble quelconque X et $(f_\alpha : X \to X_\alpha)_\alpha$ une famille d'applications quelconques. On rappelle que la topologie initiale sur X est la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications f_α.
   a) Montrer qu'une base d'ouverts pour cette topologie est formée des ouverts de la forme $\bigcap_{\beta\in B} f_\beta^{-1}(U_\beta)$ où $B \subset A$ est fini et U_β est un ouvert de X_β.
   b) Soit Y un espace topologique et $g : Y \to X$. En déduire que g est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, $f_\alpha \circ g$ est continue.
3. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques. On considère un ensemble quelconque X et $(f_\alpha : X_\alpha \to X)_\alpha$ une famille d'applications quelconques. On rappelle que la topologie finale sur X est la topologie la plus fine rendant continue toutes les applications f_α.
   a) Montrer que $U \subset X$ est ouvert pour cette topologie si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, $f_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de X_α.
   b) Soit Y un espace topologique et $g : X \to Y$. En déduire que g est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, $g \circ f_\alpha$ est continue.

Exercice 2 : Séparation et espaces quotients

Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.

1. Montrer que si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\mathcal{R} \subset X \times X$ est fermé.

2. Montrer que si $\mathcal{R} \subset X \times X$ est fermé et si $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé. Un contre-exemple est étudié dans un exercice de cette feuille.
3. On suppose dans cette question que $X = E$ est un espace vectoriel normé et que $\mathcal{R}$ est donné par $x\mathcal{R}y \iff x - y \in F$ où F est un sous-espace vectoriel de E. On note dans ce cas E/F l'espace quotient. Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel topologique.
   a) Montrer l'équivalence entre les 3 points suivants :
      (i) F est fermé
      (ii) E/F est normable
      (iii) E/F est séparé
      Indication : pour l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii), on pourra considérer l'application $||\pi(x)|| = \inf_{x\in\pi(x)} d(x, F)$
   b) En déduire le résultat suivant : soit $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire. Alors :
$$f \text{ est continue } \iff \ker f \text{ est fermé.}$$

Exercice 3 : Un produit d'espaces métriques est-il métrisable ?

Soit $((X_i, d_i))_{i\in I}$ une famille d'espaces métriques ayant au moins 2 points. On considère l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$. Montrer que X est métrisable si et seulement si I est dénombrable.

Exercice 4 : Lemme d'Urysohn

Définition. On dit qu'un espace topologique X est normal (ou T4) si pour tous fermés disjoints $F_0, F_1 \subset X$, il existe des ouverts disjoints $U_0, U_1 \subset X$ tels que $F_0 \subset U_0$ et $F_1 \subset U_1$.

On souhaite montrer le résultat suivant :

Théorème. (**Lemme d'Urysohn**) Soit X un espace topologique. Les deux assertions suivantes son équivalentes :

(i) X est normal.
(ii) pour tous fermés disjoints $F_0, F_1 \subset X$, il existe $f : X \to [0, 1]$ continue qui vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1.

1. Montrer que (ii) implique (i).
2. Montrer que tout espace métrique est normal.
3. On souhaite montrer (i) implique (ii). On suppose donc que X est normal et on fixe F_0 et F_1 deux fermés disjoints.
   a) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des dyadiques de $[0, 1]$ (les nombres de la forme $\frac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n\}$). Montrer qu'il existe une famille de fermés $(G_x)_{x\in\mathcal{D}}$ telle que :
      - $G_0 = F_0$ et $G_1 \subset F_1^c$
      - Si $x < y \in \mathcal{D}$, $G_x \subset \mathring{G}_y$
   b) On définit $f : X \to \mathbb{R}$ en posant :
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in \mathcal{D}, x \in G_r\} & \text{si } x \in G_1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
      Montrer que f convient.

Pour aller plus loin : Exemples et contre-exemples

Exercice 5 : Exemples d'espaces quotient

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel et tous les espaces quotient considérés seront munis de la topologie quotient.

1. (**Tores**) On définit le tore de dimension n comme étant le quotient $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ i.e. le quotient de $\mathbb{R}^n$ par la relation d'équivalence $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$. On note $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité.
   Montrer que $\mathbb{T}^n$ et $(\mathbb{S}^1)^n$ sont homéomorphes.
2. (**Droites projectives réelles**) On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff x \in \mathbb{R}y$. On note $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\mathcal{R}$.
   a) Montrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est en bijection avec les droites de $\mathbb{R}^n$.
   b) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\sim$ où $\mathbb{S}^n$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $x \sim y \iff x = y$ ou $x = -y$ (relation d'antipodie).
   c) Montrer $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.
3. (**Cônes**) Soit X un espace topologique. On considère sur $X \times [0, 1]$ le relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :
   $$(x, t)\mathcal{R}(y, s) \iff (t = s = 1) \text{ ou } (x, t) = (y, s)$$
   On considère enfin $CX := (X \times [0, 1])/\mathcal{R}$ et on note π la projection canonique.
   a) Décrire l'image de $X \times \{1\}$.
   b) Montrer que $x \in X \mapsto \pi(x, 0) \in CX$ est un homéomorphisme sur son image. On peut donc identifier X à un sous-ensemble de CX.
   c) On se donne Y un autre espace topologique et $f : X \to Y$ continue. Montrer que l'on peut définir une application continue $Cf : CX \to CY$ telle que pour tout $(x, t) \in X \times [0, 1], Cf(\pi_X(x, t)) = \pi_Y(f(x), t)$.
4. (**Ecrasements**) Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On considère sur X le relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :
   $$x\mathcal{R}y \iff (x \in A \text{ et } y \in A) \text{ ou } x = y$$
   On considère enfin $X/ < A >:= X/\mathcal{R}$ et on note π la projection canonique.
   a) Décrire l'image de A dans $X/ < A >$.
   b) On suppose que A est fermé ou ouvert. Montrer que $\pi : X \setminus A \to X/ < A >$ est un homéomorphisme sur son image.
   c) (Un exemple) Montrer que $C\mathbb{S}^n/ < \mathbb{S}^n >$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n+1}$.

Exercice 6 : Espace de Helly

On construit dans cet exercice un espace séparable, à base dénombrable de voisinages mais qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts. On considère l'espace $[0, 1]^{[0,1]}$ des applications de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, muni de la topologie produit (= de la convergence simple) et son sous-espace H des fonctions croissantes, muni de la topologie induite. C'est l'*espace de Helly.*

1. Montrer que H est séparable et à base dénombrable de voisinages.
2. Montrer que H n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
   Indication : Considérer les fonctions $f_x, x \in [0,1]$, telles que $f_x(y) = 0$ si $y < x$, $f_x(x) = \frac{1}{2}$ et $f_x(y) = 1$ si $y > x$.

Exercice 7 : Droite et plan de Sorgenfrey

L'espace topologique que nous allons construire fournit des contre-exemples pour un certain nombre de propriétés. Pour des tas de contre-exemples, on pourra consulter le Springer, *Counterexamples in Topology*, Lynn Arthur Steen, J. Arthur SeebachJr.
On munit $\mathbb{R}$ de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles $[a, b[, a < b$. On note S la droite réelle munie de cette topologie.

1. Cette topologie est-elle plus fine que la topologie usuelle ? Moins fine ?
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans S. En particulier, S est séparable.
3. Montrer que S n'est pas métrisable. *Montrer que S ne possède pas de base dénombrable d'ouverts*
4. On considère dans la suite $S \times S$ muni de la topologie produit et l'antidiagonale $\Delta = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. On note enfin $K = \{(x, -x); x \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que Δ est un fermé discret.
5. Montrer que K et $L = \Delta \setminus K$ sont fermés.
6. On souhaite montrer que K et $\Delta \setminus K$ sont deux fermés disjoints tels que pour tous ouverts U et V,
   $$K \subset U \text{ et } \Delta \setminus K \subset V \implies U \cap V \neq \emptyset$$
   On fixe donc deux tels ouverts U et V.
   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \{x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; [x, x+2^{-n}[\times [-x, -x+2^{-n}[\subset V\}$. Montrer que $[0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \cup \mathbb{Q}$.
   b) En admettant le théorème suivant :

      Théorème. Soit (X, d) espace métrique compact et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fermés d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

      Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $]a, b[\subset \overline{K_n}$ où l'adhérence est comprise ici au sens de la topologie usuelle.
   c) Montrer que $\{(x, -x+\epsilon); x \in]a, b[, 0 < \epsilon < 2^{-n}\} \subset V$.
   d) Conclure.
7. On considère sur $S \times S$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes d'équivalence sont données par $K, \Delta \setminus K$ et $\{x\}, x \in S \times S \setminus \Delta$. Montrer que $\mathcal{R}$ est fermée mais que $S \times S/\mathcal{R}$ n'est pas séparé.
