TD 4 : Compacité

René Maurice Fréchet (1878-1973) est un mathématicien français particulièrement prolifique, à qui l'on peut attribuer l'une des premières définitions d'espaces compacts. Élève de Henri Poincaré, il contribua grandement au développement de la topologie et de l'analyse fonctionnelle (on lui doit le nom des espaces de Fréchet). Petite anecdote : il parlait l'espéranto et a même publié des articles dans cette langue !

Exercice 1 : Echauffement

Pour chacun des espaces topologiques suivants, dire s'il est compact.

1. L'espace $E = [0;1]^{[0;1]}$ des fonctions de $[0;1]$ vers $[0;1]$, muni de la topologie produit ?
2. L'espace $F \subset E$ des fonctions 1-lipschitziennes, muni de la topologie induite par celle de E ?
3. L'espace $G \subset E$ des fonctions continues, muni de la topologie induite par celle de E ?
4. La boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ d'un espace vectoriel normé X.

Exercice 2 : Les compacts sont normaux

Soit X un espace topologique compact.

1. Montrer que X est régulier (T3) : pour tous fermé $F \subset X$ et pour tout $x \in F^c$, il existe deux ouverts disjoints U et V tel que $F \subset U$ et $x \in V$.
2. Montrer que X est normal (T4) : pour tous fermés disjoints F et G, il existe des ouverts disjoints U et V tels que $F \subset U$ et $G \subset V$.

Exercice 3 : Compactification d'Alexandrov

Soit X un espace topologique localement compact (i.e. séparé et tel que tout point possède un voisinage compact). On fixe ∞ un point (qui n'est pas dans X) et on pose $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. On dit que $U \subset \hat{X}$ est ouvert si U vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

- $U \subset X$ et U est un ouvert de X
- $\infty \in U$ et $\hat{X} \setminus U$ est un compact de X

1. Montrer que cela définit une topologie sur X.
2. Montrer que $\hat{X}$ est compact.

3. Montrer $\iota : X \to \hat{X}; x \mapsto x$ est un homéomorphisme sur son image.
4. Soit Y un espace topologique compact tel qu'il existe $j : X \to Y$ homéomorphisme sur son image tel que $Y \setminus j(X)$ est réduit à un point. Montrer que Y est homéomorphe à $\hat{X}$.

5. **Un exemple.** On considère $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et on note $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle Nord. On appelle projection stéréographique l'application qui a un point $X \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ lui associe l'unique point d'intersection de la droite (NX) avec le plan $\{x_n = -1\}$. En utilisant la projection stéréographique, montrer que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ est (homéomorphe à) $\mathbb{S}^n$.

Exercice 4 : Applications continues et compacité

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $||f(x)|| \to +\infty$ quand $||x|| \to \infty$. Montrer que f est un homéomorphisme.
2. **Théorème de Dini.** Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $(f_n : X \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions continues telle que :
   - (f_n) converge simplement vers une fonction f **continue**,
   - pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ décroît.

   Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Retour sur la distance de Hausdorff

On considère un espace métrique compact (X, d). A l'image du TD 1, on peut définir une distance δ sur l'ensemble des parties compactes de X, ensemble que l'on note $\mathcal{K}(X)$. On admet que les deux définitions suivantes de δ définissent effectivement une distance et sont équivalentes :

$$\delta(A, B) = ||d_A - d_B||_\infty$$

où $d_A(y) = \inf_{x \in X} d(x, y)$ est la distance à A ; et

$$\delta(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0, A \subset V_\varepsilon(B) \text{ et } B \subset V_\varepsilon(A)\}$$

où $V_\varepsilon(A) = \{x \in X, d(x, A) \leq \varepsilon\}$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que $(\mathcal{K}(X), \delta)$ est compact.

1. *Préliminaires.*
   a) Montrer que X est à base dénombrable d'ouvert. On note $(U_m)_{m \in N}$ une telle base.
   b) Soit (K_n) une suite de $\mathcal{K}(X)$ qui converge vers K et soit (x_n) une suite de X telle que $x_n \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \to x$. Montrer que $x \in K$.
   Dans la suite, on considère une suite quelconque (K_n) de $\mathcal{K}(X)$ et on souhaite montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.
2. a) Soit U un ouvert de X. Montrer qu'on peut extraire de $(K_n)_n$ une sous-suite $(K_{\sigma(n)})_n$ tel que soit $\forall n, K_{\sigma(n)} \cap U = \emptyset$ soit $\forall n, K_{\sigma(n)} \cap U \neq \emptyset$.
   b) En déduire qu'il existe une extraction ϕ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $K_{\phi(n)} \cap U_m = \emptyset$ à partir d'un certain rang, soit $\forall n, K_{\phi(n)} \cap U_m \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang.
   Dès lors, on note $L_n = K_{\phi(n)}$ et L l'ensemble des points $x \in X$ tel que pour tout voisinage V de x, $L \cap L_n \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang :
   $$L \coloneqq \{x \in X; \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; V \cap L_n \neq \emptyset\}$$
3. Montrer que L est compact.
4. On souhaite finalement montrer que $L_n \to L$ dans $(\mathcal{K}(X), \delta)$. On fixe $\varepsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe une famille finie $(U_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ finie telle que :
      - $\forall i \in I, U_i \cap L \neq \emptyset$
      - $\forall i \in I, \text{diam} U_i \leq \varepsilon$
      - $L \subset \bigcup_{i \in I} U_i \subset V_\varepsilon(L)$

      On note $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.
   b) En déduire que pour tout $i \in I$ $U_i \cap L_n \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang puis que $U \subset V_\varepsilon(L_n)$ à partir d'un certain rang.
   c) Montrer qu'il existe $0 < r < \varepsilon$ et $J \subset \mathbb{N}$ finie tels que
   $$X \setminus U \subset \bigcup_{j \in J} U_j \subset X \setminus V_r(L)$$
   d) Montrer que $L_n \subset U$ à partir d'un certain rang.

e) Conclure.

Exercice 6 : Être ou ne pas être compact ou séquentiellement compact.

On rappelle qu'un espace topologique est dit séquentiellement compact si de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge.

1. Soit $I = [0, 1]$ muni de la topologie usuelle et $X = I^I$ muni de la topologie produit.
   a) Justifier que X est compact.
   b) On définit $a_n : I \to I$ par $a_n(x) =$ le n-ième chiffre dans l'écriture en base 2 de x. Montrer que l'on ne peut pas extraire de (a_n) une sous-suite qui converge.
2. *[Pour ceux qui suivent le cours de Logique]* On note Ω le premier ordinal non dénombrable (à savoir $\Omega = \{\alpha; \alpha \text{ ordinal dénombrable }\}$). On muni Ω de la topologie de l'ordre i.e. U est ouvert si et seulement si pour tout $\beta \in U$

$$\exists \alpha, \gamma \in \Omega, \alpha < \beta < \gamma \text{ et } \{\delta \in \Omega; \alpha < \delta < \gamma\} \subset U$$

   a) En considérant le recouvrement $U_\alpha := \{\beta \in \Omega; \beta < \alpha\}$, montrer que Ω n'est pas compact. On rappelle que Ω est non dénombrable.
   b) Montrer que Ω est séquentiellement compact. *Indication : On pourra montrer que toute suite possède une sous-suite monotone.*
