

TD 5 : Complétude



Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est l'un des mathématiciens les plus prolifiques. Règle de Cauchy, suites de Cauchy, critère de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz, équations de Cauchy-Riemann. Son nom est partout, et pour cause : il a influencé de façon incommensurable les mathématiques, et dans tous les domaines. Son plus grand défaut ? Il a enseigné à l'X ... (bon, il était aussi royaliste).



Exercice 1 : Echauffement

Pour chacun des espaces métriques suivants, dire s'il est complet. S'il ne l'est pas, en décrire un complété. On rappelle qu'un complété d'un espace métrique F est un espace métrique complet E muni d'une isométrie $i : F \rightarrow E$ telle que $i(F)$ est dense dans E .

1. L'espace E_0 des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. L'espace E des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} à support compact, avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. L'espace c_0 des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nulles sauf en un nombre fini de points muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
4. L'espace l_1 des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\|u\|_1 := \sum_{\mathbb{N}} |u_n| < \infty$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.
5. L'espace c_0 muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 2 : Autour du théorème de point fixe de Picard

On commence par rappeler l'énoncé du théorème :

Théorème. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ k -Lipschitzienne avec $0 < k < 1$. Alors f possède un unique point fixe.

1. Montrer par un contre-exemple que la conclusion du théorème tombe en défaut si :
 - a) l'on enlève l'hypothèse X complet
 - b) on suppose simplement que pour tout $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.
2. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ continue et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p est k -contractante avec $0 < k < 1$. Montrer que f possède un unique point fixe.
3. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ tel que pour tous $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f possède un unique point fixe.

4. Soit X et Y deux espaces métriques avec X complet et $f : X \times Y \rightarrow X$ une application continue et k -contractante en X . Montrer que la fonction qui à y associe l'unique point fixe de $f(\bullet, y)$ est continue.
5. **Une application.** Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ une fonction \mathcal{C}^1 et $k \in]0; 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x|f'(x)| \leq kf(x).$$

Montrer que f admet un unique point fixe. *Indication : on pourra considérer la distance $d(x, y) := |\ln(x) - \ln(y)|$ et montrer qu'elle engendre la topologie usuelle sur \mathbb{R}_+^* et en fait un espace complet.*

Exercice 3 : une application du théorème de Baire aux fonctions continues

1. **Un corollaire du théorème de Baire.** Soit X un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermés tels que $X = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\Omega = \bigcup_n \overset{\circ}{F}_n$ est dense dans X .
2. Soient X et Y deux espaces métriques. On suppose X **complet**. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $X \rightarrow Y$ et $f : X \rightarrow Y$ telles que pour tout $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. On souhaite montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, on note

$$F_{n,k} := \left\{ x \in X; \forall p, q \geq n, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k} \right\}, \quad \Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{k,n} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcap_k \Omega_k$$

- a) Montrer que si $x \in \Omega$, alors f est continue en x .
 b) Conclure.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' est continue sur une partie dense.

Exercice 4 : Fonctions continues nulle part dérivables

On notera $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. **Un exemple ...** Montrer que la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(2^n x)}{2^n}$ est continue et nulle part dérivable, où $d(x)$ désigne la distance de x à l'entier de plus proche.
2. **... loin d'être exceptionnel!** En étudiant les ensembles

$$F_n := \left\{ f \in E; \exists x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq n|x - y| \right\}$$

montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans E .



Exercice 5 : Retour sur la distance de Hausdorff

1. On va montrer que l'ensemble des compacts de \mathbb{R}^n muni de la distance de Hausdorff est complet. On renvoie au TD1 pour la définition de la distance de Hausdorff entre deux compacts. Soit (K_n) une suite de Cauchy de compacts.
 - a) Montrer que la suite des distance $d(\bullet, K_n)$ converge uniformément vers une limite $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
 - b) Montrer que $L := \overline{\bigcup_n K_n}$ est compact. (On pourra montrer qu'il est précompact et fermé)
 - c) Montrer que $K := \varphi^{-1}(0)$ est un compact inclus dans L et que $K_n \rightarrow K$.
2. a) Soit f_1, \dots, f_p des k -contractions de \mathbb{R}^n . On pose alors, pour $K \subset X$ un compact, $T(K) := \bigcup_1^p f_i(K)$. Montrer qu'il existe un unique compact K tel que $T(K) = K$.
 b) Identifier K lorsque $n = 1$, $f_1(x) = \frac{x}{3}$ et $f_2(x) = \frac{2+x}{3}$.

Exercice 6 : Interverson surprenante !

On va démontrer le théorème de Sunyer i Balaguer :

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est polynomiale. Autrement dit,

$$\forall x, \exists n, f^{(n)}(x) = 0 \iff \exists n, \forall x, f^{(n)}(x) = 0$$

1. On va commencer par un cas facile : on suppose que f est analytique i.e. f est développable en série entière au voisinage de chacun de ses points.
 - a) Montrer que s'il existe $I \subset \mathbb{R}$ intervalle non vide tel que $f|_I = 0$ alors $f = 0$.
 - b) En considérant les ensembles $F_n = \{x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 0\}$, montrer le résultat.
2. On démontre dans cette question la version générale du théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 0$. On note

$$Y = \{x \in \mathbb{R}; \exists a < x < b, f \text{ est polynomiale sur }]a, b[\} \text{ et } X = \mathbb{R} \setminus Y$$

- a) Montrer que si $X = \emptyset$, alors f est polynomiale.
 Dans la suite de la question, on raisonne par l'absurde et on suppose que $X \neq \emptyset$.
- b) Montrer que X est complet.
- c) Montrer que X est sans point isolé.
- d) On note $F_n = \{x \in X; f^{(n)}(x) = 0\}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $X \cap]a, b[\neq \emptyset$ et pour tout $n \geq n_0$, $X \cap]a, b[\subset F_n$.
- e) Montrer que $]a, b[\subset F_{n_0}$ puis conclure.

Exercice 7 : Théorème d'Alexandroff-Mazurkiewicz (Partiel 2016)

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit A une partie de X . On va montrer l'équivalence suivante :

(1) Il existe une distance d' sur A qui engendre la même topologie que d et pour laquelle (A, d') est complet.

(2) A est une intersection dénombrable d'ouverts de X .

1. Quelques préliminaires.

a) Montrer qu'un fermé de X peut s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts.

b) Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ où Y est un espace topologique, est une intersection dénombrable d'ouverts.

2. On va traiter le sens direct.

a) Soit d' une distance complète sur A , induisant la même topologie que la distance d . Montrer qu'on peut supposer d' bornée et A dense dans X .

b) Pour z dans X , on pose

$$f(z) = \sup \left\{ \limsup_n d'(x_n, x_{n+1}) \text{ tq } x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \rightarrow z \text{ pour } d \right\}.$$

Montrer que f est bien définie et à valeurs réelles. Montrer que f est continue exactement en les points de A .

c) Conclure le sens (1) \implies (2).

3. Passons au sens réciproque.

a) Soit U un ouvert de X . On considère d' , définie sur U , par

$$d'(x, x') = d(x, x') + \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right|,$$

où $f(x) = d(x, X - U)$. Montrer que d' est une distance sur U , induisant la même topologie que d . Montrer que (U, d') est un espace métrique complet.

b) Utiliser la question précédente pour construire une métrique complète sur $A = \bigcap_n U_n$, où $(U_n)_n$ est une famille dénombrable d'ouverts de X .]