TD 6 : Connexité

Henri Poincaré (1854 - 1912) est l'un des plus grands mathématiciens français, maîtrisant tout autant la physique théorique et la philosophie des sciences. Ses travaux sur le problème des trois corps en font l'un des précurseurs de grandes branches des mathématiques : l'étude qualitative des équations différentielles, la théorie du chaos et les systèmes dynamiques. Il est également l'un des fondateur de la topologie algébrique. On lui doit notamment ce qui a été classé en 2000 comme l'un des 7 problèmes du millénaire : la conjecture de Poincaré, résolue en 2003 par Perelman et qui énonce : *Toute 3-variété compacte sans bord et simplement connexe est homéomorphe à la 3-sphère.* Lucide, Poincaré en avait dit à l'époque : *« mais cette question nous entraînerait trop loin ».*

Exercice 1 : Échauffement

Dites si les ensembles suivants sont connexes, et essayez de justifier votre réponse par un seul mot.

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
4. $O_n(\mathbb{R})$
5. $SO_n(\mathbb{R})$
6. $S_n(\mathbb{R})$ l'espaces des matrices symétriques réelles
7. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice symétriques définies positives
8. $S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
9. $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^*M = I_n\}$

Exercice 2 : Pot pourri

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Soit X un espace topologique tel que tout point possède un voisinage connexe par arcs. Montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.
3. Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
4. Soient A et B deux fermés d'un espace topologique tels que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes. Montrer que A et B sont connexes.

Exercice 3 : Quelques petits classiques

1. **Théorème de Darboux**. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
2. Soit (X, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite de X telle que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est connexe.
3. **Lemme de la grenouille.** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Soit $x_0 \in [0,1]$ et (x_n) la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si $x_{n+1} - x_n \to 0$, alors (x_n) converge.

Exercice 4 : Exemples et contre-exemples

1. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu i.e. ses composantes connexes sont les singletons.
2. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^2$,
$$E = \{(0,0)\} \cup [0,1] \times \{1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$$
est connexe mais pas connexe par arcs.
3. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^2$,
$$E = \{(x, rx); x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$$
est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs (localement connexe par arcs : pour tout $x \in X$, tout voisinage de x contient un voisinage connexe par arcs.)

Exercice 5 : Fonctions sous-harmoniques

Soit Ω un ouvert **connexe** borné du plan complexe.
On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est **sous-harmonique** si elle est continue et si pour tout $a \in \Omega, \exists r_a > 0$ tel que $\overline{D(a, r_a)} \subset \Omega$ et

$$\forall 0 \leq r \leq r_a, f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta$$

Soit $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ sous-harmonique sur Ω. Montrer que f vérifie le principe du maximum :

$$\sup_{\bar{\Omega}} f = \sup_{\partial\Omega} f$$

Pour aller plus loin

Exercice 6 : Inégalité de Bernstein

Dans cet exercice, on utilise le résultat de l'exercice précédent. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré n ($a_n \neq 0$). On souhaite montrer l'inégalité de Bernstein

$$\sup\{|P'(z)|, |z| \leq 1\} \leq n \sup\{|P(z)|, |z| \leq 1\}$$

On suppose dans la suite que $\sup\{|P(z)|, |z| \leq 1\} = 1$, quitte à multiplier P par une constance.

1. Montrer que $|P|$ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$.
2. En étudiant le polynôme réciproque de P, à savoir, $Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$, montrer que
$$|z| \geq 1 \implies |P(z)| \leq |z|^n$$
3. On fixe $w \in \mathbb{C}, |w| = 1$ et on veut montrer que $|P'(w)| \leq n$. Posons alors $\lambda = \frac{P'(w)}{nw^{n-1}}$ et $Q = P - \lambda X^n$. Montrer que si $|\lambda| > 1$, toutes les racines de Q sont dans $D(0, 1)$.
4. Montrer que si $|\lambda| > 1$, toutes les racines de Q' sont dans $D(0, 1)$. On pourra utiliser le théorème de Gauss-Lucas : *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*
5. En déduire que $|\lambda| \leq 1$, puis conclure.

Exercice 7 : Le tipi de Cantor

On rappelle que l'ensemble triadique de Cantor est obtenu comme l'intersection d'une famille dénombrable d'intervalles $K = \bigcap_{m \in M} I_m$ où M est dénombrable. On note alors $\mathcal{B} = \bigcup_{m \in M} \partial I_m$. On note $p = (1/2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si $z \in K$, on définit la partie

$$D(z) = \begin{cases} \{(x, y) \in [(z, 0), p]; y \in \mathbb{Q}\} \text{ si } z \in \mathcal{B} \\ \{(x, y) \in [(z, 0), p]; y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Enfin, on appelle Tipi de Cantor (ou éventail de Knaster-Kuratowski) la partie $X = \bigcup_{z \in K} D(z)$, que l'on munit de la topologie induite.

1. Montrer que $X \setminus \{p\}$ est totalement discontinu.
2. (**difficile**) montrer que X est connexe.

Exercice 8 : Homotopie et logarithme

Définition. *Si f et g sont deux applications continues $f, g : X \to Y$, on dit qu'elles sont homotopes s'il existe une application continue $H : (x, t) \in X \times [0; 1] \mapsto H_t(x) \in Y$ telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$.*

1. Montrer que l'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions continues de X vers Y.

   Définition. *Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{C}^*$ continue. On dit que f admet un logarithme continu s'il existe $g : X \to \mathbb{C}$ continue telle que $f(x) = \exp(g(x))$, pour tout $x \in X$, ce que l'on note $f = e^g$.*

2. Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$. Montrer que f possède un logarithme continu.
3. Soit X un espace métrique compact, et $f_0, f_1 : X \to \mathbb{C}^*$ deux applications continues homotopes. On va montrer que si f_0 possède un logarithme continu, alors f_1 aussi. On note H une homotopie entre f_0 et f_1.
   a) Montrer que l'on peut supposer que $\operatorname{Im} f_i \subset \mathbb{S}^1$ et que $\operatorname{Im} H \subset \mathbb{S}^1$.
   b) Montrer qu'il existe des valeurs $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ telles que, si $H_t = H(t, \cdot)$.
   $$\|H_{t_{i+1}} - H_{t_i}\|_\infty < 2$$
   c) En déduire que chacune des fonctions $x \mapsto \frac{H_{t_{i+1}}(x)}{H_{t_i}(x)} \in \mathbb{S}^1$ possède un logarithme continu.
   d) Conclure.
4. Montrer que dans le cas où X est un compact étoilé de $\mathbb{R}^n$, toute application continue $f : X \to \mathbb{C}^*$ possède un logarithme continu. On rappelle que X est étoilé s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\forall x \in X\ [x, x_0] \subset X$. Montrer de plus que si g et h sont deux logarithmes continus de f, alors il existe $n \in \mathbb{Z}, g = h + 2i\pi n$.
5. Montrer que le résultat subsiste pour $X = \mathbb{R}^n$.

Exercice 9 : Théorème de Brouwer en dimension 2

Cet exercice est une application de l'exercice précédent dans lequel on souhaite montre le théorème de Brouwer en dimension 2. Ce résultat, valable en toute dimension est le suivant :

Théorème. *Soit B^n la boule unité fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors toute application continue $f : B^n \to B^n$ possède un point fixe.*

On note D la boule fermé de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $g : D \to \mathbb{S}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{S}^1, g(x) = x$. (Une telle application g est une rétraction de D sur $\mathbb{S}^1$).
2. Montrer le théorème de Brouwer en dimension 2 : En raisonnant par l'absurde, construire une rétraction de D sur $\mathbb{S}^1$.