TD 7 : Théorèmes d'Ascoli et de Stone-Weierstrass

Karl Weierstrass (1815-1897) est un mathématicien allemand, souvent considéré comme l'un des pères de l'analyse. Il a notamment contribué à donner des définitions rigoureuses de certaines notions : c'est notamment ses définitions de la continuité et de la dérivabilité qui sont encore enseignées de nos jours. Il est aussi à l'origine d'une fonction continue nulle part dérivable, qui a bouleversé la communauté mathématique de son temps.

Exercice 1 : Echauffement

Dans chacun des cas, dites si l'ensemble A est dense dans l'espace normé E en justifiant :

1. $E = C(K;\mathbb{R})$ où K est un compact de $\mathbb{R}^d$ et $A = \{P_{|K} : P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$
2. $E = C(K;\mathbb{R})$ où K est un espace métrique compact et A est l'ensemble des fonctions $f : K \to \mathbb{R}$ Lipschitziennes.
3. $E = C(\mathbb{U};\mathbb{C})$ et $A = \{P_{|K} : P \in \mathbb{C}[X]\}$
4. $E = C(\mathbb{U};\mathbb{C})$ et $A = \mathrm{Vect}(z \in \mathbb{U} \mapsto z^p, p \in \mathbb{Z})$

Exercice 2 : Sur l'équicontinuité

Soit (X, d) est espace métrique **compact**. On note $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Définition. On dit qu'une partie $H \subset C(X)$ est

- **équicontinue en** x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in H, \forall x \in X, d(x, x_0) \leq \delta \implies |h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon$.
- **équicontinue** si elle est équicontinue en tout point de X.
- **uniformément équicontinue** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in H, \forall x, y \in X, d(x, y) \leq \delta \implies |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$.

1. En quels points la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ est-elle équicontinue.
2. Montrer qu'une suite uniformément convergente de fonctions forme une famille équicontinue.
3. Montrer qu'une partie $H \subset C(X)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.
4. Montrer que si $H \subset C(X)$ est équicontinue, alors $\bar{H}$ est équicontinue.

5. Montrer que si $H \subset C(X)$ est équicontinue, alors l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que $\{h(x), h \in H\}$ est borné est ouvert et fermé.

Exercice 3 : Sous-espaces de fonctions C^1 de C^0

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé dont tous les éléments sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que $T : f \in F \to f' \in E$ est une application continue. *Indication : on pourra utiliser le théorème du graphe fermé.*
2. Montrer que la boule unité de F forme une famille équicontinue de fonctions.
3. En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 4 : Opérateurs à noyaux

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ compact. On considère l'espace de Banach $E \coloneqq C(X; \mathbb{R})$.

Définition. On dit qu'une application linéaire continue (ou opérateur) $T : E \to E$ est compacte si l'image de la boule unité fermée B_E est relativement compacte dans E.

On considère également $K \in C(X \times X; \mathbb{R})$ et on note A_K l'application

$$A_K : f \in E \mapsto A_K f \text{ où } A_K f(x) = \int_X K(x,y)f(y)dy$$

L'objectif de cet exercice est de montrer de deux manières que A_K est un opérateur compact.

1. **Généralités.**
   a) Vérifier que A_K est un opérateur (i.e. une application linéaire continue).
   b) Soit $T : E \to E$ un opérateur. On suppose que $\dim \operatorname{Im} T < \infty$. Montrer que T est compact.
   c) On considère dans cette question une suite d'opérateurs $T_n \in \mathcal{L}(E)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose que :
      - $\forall n \in \mathbb{N}, T_n$ est compact.
      - $T_n \to T$ pour la norme d'opérateurs.

      On souhaite montrer que T est compact.
      i – Montrer que $T(B_E)$ est précompacte i.e. : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \ldots, x_n \in T(B_E)$ tels que
      $$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \epsilon)$$
      ii – En déduire que T est compact.

2. **Par le théorème d'Ascoli.**
   a) On note $\omega_K(\delta) \coloneqq \sup\{|K(x,y) - K(z,y)|; (x,y,z) \in X^3; |x-z| \le \delta\}$. Montrer que $\omega_K(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$.

b) Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $x, z \in X$,

$$|A_K f(x) - A_K f(z)| \leq \omega_K(|x-z|) Vol(X) ||f||_\infty$$

c) En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que $A_K(B_E)$ est relativement compact et en déduire que A_K est compact.

3. **Par le théorème de Stone-Weirstrass.**
   a) Soit $P = \{(x,y) \in X^2 \mapsto f(x)g(y) | f, g \in E\}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(P)$ est dense dans $C(X \times X; \mathbb{R})$.
   b) Montrer que pour tout $L \in \mathrm{Vect}(P)$, $\dim \mathrm{Im}\, A_L < \infty$.
   c) Montrer que si L_n est une suite de $C(X \times X; \mathbb{R})$ telle que $||L_n - K||_\infty \to 0$, alors $A_{L_n} \to A_K$ pour la norme d'opérateurs.
   d) En déduire (encore) que A_K est compact.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Polynômes de Bernstein

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$, on note

$$B_n(f) : x \in [0,1] \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

On notera également le module d'uniforme continuité de f :

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

1. Vérifier que $B_n(f)$ est polynomiale.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$||B_n(f) - f||_\infty \leq \omega_f(\delta) + \frac{||f||_\infty}{2n\delta^2}$$

3. Conclure que $(B_n(f))$ converge uniformément vers f et retrouver le théorème de Weierstrass.

Exercice 6 : Théorème de Weierstrass sur $\mathbb{R}$

On note $C_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$$

On munit $C_0(\mathbb{R})$ de la norme uniforme.

1. Montrer que $C_0(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.
2. a) On note ϕ l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i \arctan(x)} \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Démontrer que ϕ est un homéomorphisme et que $\lim_{|x| \to +\infty} \phi(x) = -1$.
   b) Si $f \in C_0(\mathbb{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application de $\mathbb{U} \to \mathbb{K}$ qui vaut 0 en -1 et $f\left(\phi^{-1}(x)\right)$ pour $x \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrer que l'application $f \in C_0(\mathbb{R}) \mapsto \tilde{f} \in C(\mathbb{U})$ est bien définie et que c'est une isométrie linéaire.
3. Soit H une sous-algèbre de $C_0(\mathbb{R})$ qui vérifie :
   - Pour tous $x \neq y \in \mathbb{R}$, il existe $f \in H, f(x) \neq f(y)$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $f \in H, f(x) \neq 0$
   - Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout $f \in H, \bar{f} \in H$

   Montrer que H est dense dans $C_0(\mathbb{R})$. *Indication : on pourra étudier* $\mathbb{R}1 \oplus \tilde{H}$ *dans* $C(\mathbb{U}, \mathbb{K})$.
4. Une application : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}$.
   a) Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. *Indication : on pourra utiliser la densité de* $C_c^1(\mathbb{R})$ *dans* $L^1(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$ converge absolument et définit une fonction, notée $f * g$, qui est un élément de $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.
   c) Montrer que $\{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$. *Indication : on rappelle que si* $\xi_0 \in \mathbb{R}$ *et si* $g_{\xi_0}(x) = e^{ix\xi_0} e^{-\frac{x^2}{2}}$ *alors* $\widehat{g_{\xi_0}}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2}}$