TD 9 : Calcul différentiel

Henri Cartan (1904-2008) est un ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure (comme vous avez sûrement du deviner), où il y fit la connaissance d'André Weil, avec qui, entre autres, il fonda le groupe Bourbaki. Il est reconnu pour ses travaux en topologie ou encore en analyse complexe. Il est aussi l'auteur d'un ouvrage très complet qui pourrait vous servir dans ce cours : *Calcul différentiel*, Paris, Hermann, 1967.

Exercice 1 : Échauffement

1. Soit E un espace de Banach, $U \subset E$ ouvert, $x \in U$, $v \in E \setminus \{0\}$ et $f : U \to E$ différentiable en x. Quelle est la dérivée en 0 de l'application (définie au voisinage de 0), $t \mapsto f(x + tv)$?
2. Donner les différentielles de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^m$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
3. Donner la différentielle de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (Bx, x) \in \mathbb{R}$ où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. Soit (E, N) un espace de Banach. L'application $x \mapsto N(x)$ est-elle différentiable ?

Exercice 2 : Des calculs à savoir faire rapidement

Calculer les différentielles sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de

1. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto ||x||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} \in \mathbb{R}$
2. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{||x||_2} \in \mathbb{R}^n$
3. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto f(||x||_2)$ où $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est C^1.

Exercice 3 : Un contre exemple

On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ en } (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en $(0, 0)$ dans toutes les directions mais pas différentiable.

Exercice 4 : Fonctions convexes

On fixe $U \subset E$ un ouvert convexe d'un espace de Banach normé E.

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si pour tout $x, y \in U$,
$$f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$$
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$ et $v \in E$, $D^2 f(x)(v, v) \geq 0$.

Exercice 5 : Coordonnées polaires

On définit $\Phi : (r, \theta) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ où D est la demi-droite $\mathbb{R}_- \times \{0\}$.

1. Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus D \to \mathbb{R}$ C^1. Calculer les dérivées partielles de $g = f \circ \Phi$, $\partial_r g$ et $\partial_\theta g$ en fonction de celles de f, $\partial_x f$ et $\partial_y f$.
3. On suppose que f est C^2. Exprimer $\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$ en fonction des dérivées partielles de g d'ordre 1 et 2.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ C^2 radiale i.e. de la forme $f(x, y) = g(r)$, telle que $\Delta f = 0$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $f(x, y) = a \log r + b$.

Exercice 6 : Différentielle du déterminant

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que det est $\mathcal{C}^\infty$ sur E et montrer que pour tout $M \in E$, $H \in E$,
$$d_M \det(H) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}(M)^t H\right)$$
où $\operatorname{com} M$ désigne la comatrice de M.
2. Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in E$ continue. Soient également $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ solutions de $y' = A(t)y$. On note $w(t)$ le wronskien de $y_1, \ldots, y_n$, à savoir, $w(t) = \det(y_1(t), \ldots, y_n(t))$.
   a) Calculer w'.
   b) On suppose que $A(t) = A$ est constante. En déduire $\det(e^{tA})$.

Exercice 7 : Différentielle de l'inverse

Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continues de E. On notera U l'ensemble des endomorphismes bijectifs continus.

1. Rappeler de quel théorème découle l'affirmation : si $u \in U, u^{-1} \in U$.
2. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $||u|| < 1$, alors $\mathrm{Id}_E + u \in U$.
3. En déduire que U est ouvert.
4. Montrer que $u \in U \mapsto u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Pour aller plus loin

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \text{ si } x \neq y \\ f'(x) \text{ si } x = y \end{cases}$$

Montrer que F est C^1 et donner sa différentielle.

Exercice 9 : Différentielle de l'exponentielle

On rappelle que l'exponentielle d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (où E est un espace vectoriel normé de dimension fini) est définie par les deux façons suivantes :

1. $\exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$
2. Si $\phi(t, y_0)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = u(y)$ de données initiales $\phi(0, y_0) = y_0$, alors $\exp(u)(y_0) = \phi(1, y_0)$.

On note dans la suite $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que exp est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
2. Si $A \in E$, on définit $\operatorname{ad} A \in \mathcal{L}(E)$ par $\operatorname{ad} A(B) = AB - BA$. Montrer que pour tout $A, B \in E$, on a
$$\exp(A)B\exp(-A) = \exp(\operatorname{ad} A)(B)$$
3. On admet que $exp : E \to \mathbb{R}$ est C^∞. Soient $A, B \in E$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $G_t : u \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-tA)\exp(t(A+uB))$ et $g(t) = G_t'(0)$. Montrer que
$$g'(t) = \exp(-t \operatorname{ad} A)B; g(0) = 0$$
4. Déduire des questions précédentes que l'on a
$$d\exp(A)\cdot B = \exp(A)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}(-\operatorname{ad} A)^k B \tag{3}$$

Exercice 10 : Un peu de calcul des variations

Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On note $E = C^1(I, \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme

$$||f|| = \sup_I |f| + \sup_I |f'|$$

On rappelle que E est ainsi un espace de Banach.
On se donne également une applications $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On note ∂_i la dérivée partielle de f par rapport à la i-ème variable. On définit une "fonctionnelle" sur E par

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))dx$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est différentiable sur E et que pour tout $f \in E, h \in E$,

$$d\mathcal{F}(f) \cdot h = \int_a^b \left[\partial_2\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) \cdot h(x) + \partial_3\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) \cdot h'(x)\right] dx$$

2. Dans cette question, on se donne $f \in E$ tel que pour tout $g \in E$ vérifiant $g(a) = f(a), g(b) = f(b)$ alors $\mathcal{F}(f) \leq \mathcal{F}(g)$. On notera $u(x) = \partial_2\mathcal{L}(x, f(x), f'(x))$ et $v(x) = \partial_3\mathcal{L}(x, f(x), f'(x))$.
   a) Montrer que pour tout $h \in E$ tel que $h(a) = h(b) = 0$, $d\mathcal{F}(f) \cdot h = 0$.
   b) Soit U continue sur I telle que pour tout $h \in E$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, on ait $\int_a^b U(x)h'(x)dx = 0$. Montrer que U est constante.
   c) En introduisant une primitive U de u, montrer que v est C^1 et vérifie $v' = u$. Autrement dit, f vérifie les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dx}\partial_3\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) = \partial_2\mathcal{L}(x, f(x), f'(x))$$

   d) Que dire d'une solution f dans le cas où $\mathcal{L}(x, y, z) = (1 + z^2)^{1/2}$, autrement dit, le cas où $\mathcal{F}(f)$ n'est autre que la longueur de la courbe de f. Commenter.