

Ecole Normale Supérieure  
Université Pierre et Marie Curie

---

# Sur le premier revêtement de l'espace de module de Drinfeld

Arnaud VANHAECKE  
Promotion 2015

*Sous la direction de L. FARGUES*

9 octobre 2018

# SUR LE PREMIER REVÊTEMENT DE L'ESPACE DE MODULES DE DRINFELD

ARNAUD VANHAECKE

La tour des revêtements de l'espace de Drinfeld s'est avérée fondamentale dans l'étude de la correspondance de Langlands locale. On s'intéresse ici à la construction et à l'étude d'un modèle formel du premier revêtement de l'espace symétrique de Drinfeld. Ce mémoire est composé de deux parties (presque) indépendantes.

Dans la première partie on étudie les schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur un corps parfait,  $k$ , de caractéristique  $p$ . Ce sont des schémas en groupes finis munis d'une action vectorielle d'un corps fini,  $\mathbb{F}$ . On commencera par quelques rappels sur les schémas en groupes finis définis sur un corps parfait de caractéristique  $p$  et on discutera de leur classification. L'outil principal pour étudier ces objets est le *module de Dieudonné*. Si  $G$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels de  $k$ -algèbre de Hopf  $A$ , alors  $A$  est muni d'une action de  $\mathbb{F}$ . Si on note  $\mathbb{F}^\vee$  les caractères multiplicatifs du groupe  $\mathbb{F}^\times$ , cette action donne lieu à une graduation de  $A$  de type  $\mathbb{F}^\vee$  :

$$A = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A_\chi.$$

On associe à cette décomposition un caractère qui encode la dimension des composantes isotypiques :

$$\text{Ch}_k(G) = \sum_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \dim_k(A_\chi)[\chi] \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^\vee].$$

D'autre part, le module de Dieudonné de  $G$ , que l'on notera  $M$ , est muni d'une action de  $\mathbb{F}$ . Si on note  $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F}^\vee$  les caractères qui respectent l'addition, alors on montre que  $M$  est muni d'une graduation sur  $\mathbb{F}^+$  compatible au Frobenius et au décalage :

$$M = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} M_\chi.$$

Le premier théorème principal de cette partie est une formule des caractères, reliant les dimensions des composantes isotypiques de ces deux décompositions. Je tiens à remercier Laurent Fargues de m'avoir proposé cette formule élégante et de m'avoir guidé et encouragé tout au long de sa démonstration.

**Théorème 0.1.** *Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p$  et  $M$  son module de Dieudonné. Notons pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$ ,  $n_\chi = \dim_k(M_\chi)$ . Alors*

$$\text{Ch}_k(G) = \prod_{\chi \in \mathbb{F}^+} (1 + [\chi] + [\chi^2] + \cdots + [\chi^{p-1}])^{n_\chi}.$$

L'intérêt des schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels est d'étudier les points de torsion de modules formels. Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $D$  une algèbre centrale simple sur  $K$  et  $O_D$  son ordre maximal. On note  $\kappa$  le corps résiduel de  $K$ . On fixe  $\Pi \in O_D$  une uniformisante. Soit  $X$  un  $O_D$ -module formel sur  $k$ . On donnera plusieurs conditions sur  $X$ , qui généralisent celles de Drinfeld, donnée par Rapoport et Zink dans [\[RZ17\]](#). On note  $\tilde{\Psi} \cong \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}, \bar{\mathbb{F}}_p)$ , alors si on note  $L$  l'algèbre de Lie de  $X$ , elle se décompose :

$$L = \bigoplus_{\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}} L_{\tilde{\psi}}.$$

On veut décrire la structure des points de torsion  $X[\Pi]$ , qui est un schéma en  $\mathbb{F} = O_D/\Pi O_D$ -vectoriels. Soit  $M$  le module de Dieudonné de  $X[\Pi]$  alors on a le lemme suivant :

**Lemme 0.2.** *On conserve les notations précédentes. L'entier  $\dim_k(M_\chi)$  est indépendant de  $\chi \in \mathbb{F}^+$  si pour tout  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$ ,  $\dim_k L_{\tilde{\psi}} = \dim_k L_{\tau\tilde{\psi}}$  où  $\tau$  est un générateur de  $\text{Gal}(\mathbb{F}/\kappa)$ .*

Celui-ci avait déjà été observé par Rapoport et Zink. Avec le théorème précédent, il nous permet de donner la structure de  $X[\text{II}]$  dans certains cas. Cette structure est celle de *schéma de Raynaud*.

Les schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur une base plus générale sont étudiés par M. Raynaud dans [Ray74]. Il donne des équations pour les schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels tels que les composantes isotypiques, de l'idéal d'augmentation, sont des faisceaux inversibles sur la base, que l'on appellera *schémas de Raynaud*. Cette condition se vérifie point par point sur la base et donc l'étude précédente est de mise. En particulier, pour un  $O_D$ -module formel, on peut déterminer si les points de torsion forment un schéma de Raynaud. C'est le cas pour les  $O_D$ -modules formels spéciaux de Drinfeld :

**Proposition 0.3.** *Soit  $X$  un  $O_D$ -module formel strict, i.e. l'action de  $O_D$  sur l'algèbre de Lie de  $X$  se fait par un unique plongement. Alors  $X[\text{II}]$  est un schéma de Raynaud si et seulement si  $X$  est un  $O_D$ -module spécial.*

Le sens direct de cette proposition a déjà été observé par Wang (cf. [Wan14]) et lui a permis de décrire le lieu régulier du premier revêtement.

La deuxième partie est la construction d'un modèle formel pour le premier revêtement de l'espace des modules de Drinfeld. On garde les notations précédentes. *L'espace des modules de Drinfeld* est un schéma formel classifiant les déformations d'un  $O_D$ -module formel spécial. Le premier revêtement est construit à partir des points de torsion du  $O_D$ -module formel spécial universel. En vue de la proposition précédente, le problème se ramène à trouver une structure de niveau adaptée aux schémas de Raynaud. Dans la première section on rappelle deux structures : celle de Katz et Mazur (cf. [KM85]), utilisée pour étudier les problèmes de modules de courbes elliptiques, et celle plus récente de Kottwitz et Wake (cf. [KP17]). Dans la section suivante, on fait quelques rappels sur les schémas de Raynaud. On introduit ensuite une notion de *section génératrice* pour les schémas de Raynaud, donnée par une équation explicite, et on montre qu'elle est équivalente aux structures de niveaux introduites précédemment. Ces équivalences avaient déjà été observées précédemment, par Pappas (cf. [Pap95]) pour la structure de niveau de Katz-Mazur et par Kottwitz et Wake (cf. [KP17]) pour leur structure de niveau. On donne de nouvelles preuves de ces faits en utilisant le cas universel, donné par le *champs de Raynaud*, un champ algébrique classifiant les schémas de Raynaud. Pour un schéma de Raynaud  $G$ , le *sous-schéma des générateurs*  $G^\times$  est un sous-schéma fermé qui a les propriétés voulues.

La section suivante constitue aussi des rappels. On y définit les objets nécessaires pour la géométrie formelle et rigide en suivant le livre de Abbess [Abb10]. On y rappelle la construction de Raynaud des espaces rigides cohérents, comme localisation de la catégorie des schémas formels idylliques quasi-compactes :

$$Q: (\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}} \rightarrow (\mathbf{Rig})^{\text{coh}}.$$

À l'aide de topos pour le site admissible, on construit les espaces rigides quasi-séparés,  $(\mathbf{Rig})_{\text{qs}}$ . Ceci nous permet d'étendre le foncteur précédent dans le cas  $\pi$ -adique pour obtenir un foncteur *fibre générique "à la Berthelot"* :

$$Q: (\mathbf{SchFor}/R)^{\text{lftf}} \rightarrow (\mathbf{Rig}/K)_{\text{qs}},$$

des schémas formels localement formellement de types finis sur un anneau à valuation discrète  $R$  d'uniformisante  $\pi$  vers les espaces rigides quasi-séparés. On fera quelques rappels sur la normalisation des schémas formels  $\pi$ -adiques dans leurs fibres génériques, ce qui à un sens car ces schémas sont excellents d'après les travaux de Gabber.

On finit par l'étude et la construction du premier revêtement. On commence par rappeler la structure de l'espace de Drinfeld,  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$ , et de sa fibre générique. Cette description est dû à Drinfeld (cf. [Dri76]) et expliquée par Boutot et Carayol (cf. [BC91]) en dimension 1. Si on note  $\mathfrak{X}[\text{II}]$  les points de torsion du  $O_D$ -module spécial universel, le premier revêtement est usuellement défini par sa fibre générique  $\Sigma^1$ , en enlevant la section unité de  $Q(\mathfrak{X}[\text{II}])$ . Usuellement le modèle formel de cet espace est obtenu en considérant la normalisation de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  dans  $\Sigma^1$ . On définit le

premier revêtement comme le sous-schéma des générateurs  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1 = \mathfrak{X}[\Pi]^\times$ , qui est en particulier muni d'une description modulaire. On vérifie que sa fibre générique est bien  $\Sigma^1$  et qu'il est normal, obtenant ainsi le modèle formel usuellement considéré. Cette description nous permet d'étudier ça géométrie et la fibre spéciale :

**Théorème 0.4.** *Le premier revêtement de Drinfeld  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est normal et Cohen-Macaulay. Le morphisme  $\pi: \mathcal{M}_{\text{Dr}}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Dr}}$  est plat et induit un homéomorphisme universel en fibre spéciale. De plus,  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  n'est pas régulier.*

On prouve en effet que  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  n'est pas Gorenstein. Le lieu singulier de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  correspond au sous-schéma fermé obtenu comme intersection des composantes irréductibles de la fibre spéciale : c'est le lieu qui paramètre les  $O_D$ -modules formels spéciaux avec au moins deux *indices critiques*.

Le lieu lisse avait déjà été décrit par Wang dans [Wan14]. Il avait montré qu'après normalisation dans un changement de base dans une extension modérément ramifiée, la fibre spéciale des composantes connexes du lieu lisse sont les revêtements usuelles des variétés de Deligne-Lusztig. Un travail en cours est de montrer que, après normalisation dans le même changement de base, sans se restreindre au lieu lisse, on obtient les compactifications usuelles de ces revêtements dans la fibre spéciale.

Je tiens à remercier M. Rapoport de m'avoir introduit à cette question, de m'avoir fait part de ses idées sur la construction de ce modèle formel et pour avoir corrigé avec attention une version antérieure de ce texte lors de mon stage de M1 à Bonn. Je garde un très bon souvenir de ce séjour. Je remercie de plus toutes les personnes ayant pris le temps de lire, corriger ou simplement discuter avec moi de ce travail, de leurs intérêts et de leurs encouragements : J.-F. Dat, G. Dospinescu, A. Genestier, V. Lafforgue, A. Mézard, P. Scholze, B. Stroth, mais aussi mon père P. Vanhaecke. Je remercie aussi mes amis mathématiques, qu'ils soient dans le domaine ou non, pour leur soutien et les échanges en tout genre, qui m'ont tenus tout au long de ce travail : Antoine, Dimitri, Denis, Léonard et Sebastian. Comme annoncé plus tôt, je remercie mon directeur de mémoire, L. Fargues pour m'avoir apporté ses précieux conseils.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Première partie 1. Schémas en <math>\mathbb{F}</math>-vectoriels et <math>O_D</math>-modules formels</b>	4
1. Préliminaires	4
2. Schéma en $\mathbb{F}$ -vectoriels	14
3. $\mathbb{F}$ -exponentielle et formule de caractère	18
4. $O_D$ -modules formels	22
<b>Deuxième partie 2. Sur le premier revêtement de l'espace de Drinfeld</b>	24
5. Quelques structures de niveaux	24
6. Schémas de Raynaud	27
7. Préliminaires de géométrie formelle et rigide	32
8. L'espace de Drinfeld	47
Références	53

## Première partie 1. Schémas en $\mathbb{F}$ -vectoriels et $O_D$ -modules formels

### 1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette section on rappelle quelques constructions et résultats classiques que l'on utilisera dans la suite. On fixe  $p$  un nombre premier et  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ .

#### 1.1. Vecteurs et co-vecteurs de Witt.

1.1.1. Soit  $\mathbf{Ann}$  la catégorie des anneaux (commutatifs unitaires). On considère le foncteur  $c_0: \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ann}$  donné sur les objets par  $R \rightsquigarrow R^{\mathbb{N}}$ , où  $R^{\mathbb{N}}$  est muni de la structure d'anneau produit, et  $\rho \rightsquigarrow \rho^{\mathbb{N}}$  sur les morphismes. On va définir un foncteur  $W: \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ann}$  tel que  $W = c_0$  en tant que foncteurs d'ensembles mais pas en tant que foncteurs d'anneaux.

Soit pour tout entier  $n \geq 0$  le  $n$ -ième polynôme de Witt  $w_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$  défini par

$$w_n = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n X_n = \sum_{i=0}^n p^i X_i^{p^{n-i}}.$$

Posons pour tout anneau  $R$  l'application  $w_R: R^{\mathbb{N}} \rightarrow R^{\mathbb{N}}$  définie par  $w = (w_0, w_1, \dots, w_i, \dots)$ . Alors  $w$  définit une transformation naturelle  $w: c_0 \Rightarrow c_0$  en tant que foncteurs d'ensembles. De plus l'image de  $w_R$  est

$$\{(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots) \in c_0(R) \mid a_n^p \equiv a_{n+1} \pmod{p^{n+1}}\}.$$

On peut facilement montrer que c'est un sous-anneau de  $c_0(R)$  (cf. [Sch17] 1.1.5). Soit  $R^{\text{univ}} = \mathbb{Z}[X_i]_{i \in \mathbb{N}}$  l'anneau universel, celui-ci représente  $c_0$  et d'après le lemme de Yoneda  $w$  est déterminé par  $w_{R^{\text{univ}}}$ . D'après [Sch17] 1.1.3,  $w_{R^{\text{univ}}}$  est une injection car  $p$  n'est pas un diviseur de zéro dans  $R^{\text{univ}}$ . Ainsi on peut munir  $R^{\text{univ}}$  d'une structure d'anneau telle que  $w_{R^{\text{univ}}}$  soit un morphisme d'anneau. Ainsi par le lemme Yoneda on a défini  $W: \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ann}$ , les *vecteurs de Witt*, tels que  $w: W \Rightarrow c_0$  soit une transformation naturelle de foncteurs d'anneaux. Pour  $R$  un anneau on notera tout  $a \in W(R)$  comme un vecteur  $a = [a_0, a_1, \dots, a_i, \dots]$ .

On rappelle les opérations classiques sur les vecteurs de Witt. Soit  $R$  un anneau, on définit

- l'application multiplicative  $[\cdot]: R \rightarrow W(R)$  pour tout  $a = [a_0, a_1, \dots, a_i, \dots] \in W(R)$  par  $[a_0] = [a_0, 0, \dots, 0, \dots]$ ,
- l'application  $\sigma_R: W(R) \rightarrow W(R)$  comme on a obtenu la structure d'anneau, en utilisant le cas universel : pour tout  $a = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots) \in c_0(R)$  on pose  $f_R(a) = (a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, \dots)$ , et  $\sigma_R$  est défini de sorte à ce que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(R) & \xrightarrow{\sigma_R} & W(R) \\ \downarrow w_R & & \downarrow w_R \\ c_0(R) & \xrightarrow{f_R} & c_0(R) \end{array} \quad (1.1)$$

commute,

- l'application  $\tau_R: W(R) \rightarrow W(R)$  pour tout  $a = [a_0, a_1, \dots, a_i, \dots] \in W(R)$  par  $\tau(a) = [0, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots]$ .

On peut donner une description similaire à celle de  $\sigma$  en posant pour tout  $a = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots) \in c_0(R)$ ,  $v_R(a) = (0, pa_0, \dots, pa_{i-1}, \dots)$ . Il est alors facile de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(R) & \xrightarrow{\tau_R} & W(R) \\ \downarrow w_R & & \downarrow w_R \\ c_0(R) & \xrightarrow{v_R} & c_0(R) \end{array} \quad (1.2)$$

commute. Comme  $f_R \circ v_R = p$  on a  $\sigma_R \circ \tau_R = p \cdot \text{id}_{W(R)}$ . Si  $pR = 0$  on a  $\sigma(a) = [a_0^q, a_1^q, \dots, a_i^q, \dots]$  et  $\tau \circ \sigma = p$ .

Soit  $n \geq 0$  un entier, soit  $R$  un anneau. On note  $W_n(R) = W(R)/\tau^n W(R)$  l'anneau des vecteurs de Witt tronqués. L'association  $R \rightsquigarrow W_n(R)$  définit un foncteur  $\mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ann}$ . Tout élément  $a \in W_n(R)$  s'écrit de manière unique comme un vecteur fini  $a = [a_0, \dots, a_{n-1}]$  de

longueur  $n$  et  $W_n$  est naturellement muni de  $\tau$ ,  $\sigma$ , et  $[\cdot]$ . De plus  $\{W(R)_{n+1} \rightarrow W_n(R)\}$  forment un système projectif et

$$W(R) = \varprojlim_n W_n(R).$$

Ceci munit  $W(R)$  d'une structure d'anneau linéairement topologisée, complet et séparé. Si  $R$  est une algèbre sur  $k$ ,  $W(R)$  est naturellement une algèbre sur  $W(k)$  qui est linéairement topologisée.

1.1.2. *Co-vecteurs de Witt.* Pour tout  $n \geq 0$  entier et tout anneau  $R$  on définit l'application  $\tau'_n: W_n(R) \rightarrow W_{n+1}(R)$  donnée pour tout  $a = [a_0, \dots, a_{n-1}] \in W_n(R)$  par  $\tau'_n(a) = [0, a_0, \dots, a_{n-1}]$ . La famille  $\{\tau'_n: W_n(R) \rightarrow W_{n+1}(R)\}$  est un système injectif, la limite de ce système définit les groupes

$$CW^u(R) = \varinjlim_n W_n(R).$$

L'association  $R \rightsquigarrow CW^u(R)$  définit naturellement un foncteur  $\mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{GrpAb}$  dans la catégorie des groupes abéliens. Un élément  $x \in CW^u(R)$  se représente comme un co-vecteur  $x = [\dots, x_{-i}, \dots, x_{-1}, x_0]$  tel qu'il existe  $N \geq 0$  avec  $x_{-i} = 0$  pour  $i \geq N$ .

On étend les co-vecteurs en posant pour tout entier  $r \geq 0$  et  $\mathfrak{n} \subset R$  idéal nilpotent

$$CW_{r,\mathfrak{n}}(R) = \{[\dots, x_{-i}, \dots, x_{-1}, x_0] \in R^{\mathbb{N}} \mid \forall i \geq r, x_{-i} \in \mathfrak{n}\}.$$

Les *co-vecteurs de Witt* sont alors définis par

$$CW(R) = \varinjlim_{r,\mathfrak{n}} CW_{r,\mathfrak{n}}(R),$$

où la limite se fait par rapport aux inclusions. Notons que en tant qu'ensemble  $CW_{r,\mathfrak{n}}(R) = R^r \times \mathfrak{n}^{\mathbb{N}}$  et que cette définition munit  $CW(R)$  d'une structure d'espace topologique telle que  $CW^u(R) \subset CW(R)$  est dense. On admet que la structure d'anneau s'étend à  $CW(R)$ ; plus précisément on a d'après [Fon77, III 1.5].

**Proposition 1.1.** *L'association  $R \rightsquigarrow CW(R)$  définit un foncteur  $\mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{GrpAb}$  tel que  $CW^u(R) \subset CW(R)$  est un sous-groupe topologique dense pour tout anneau  $R$ .*

□

Ceci définit  $CW: \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{GrpAb}$ , le foncteur des *co-vecteurs de Witt*.

## 1.2. Modules de Dieudonné.

1.2.1. On note  $\sigma = \sigma_k: W(k) \rightarrow W(k)$ , c'est le relèvement du morphisme de Frobenius de  $k$ . Soit  $\mathbb{D}_k$  l'algèbre de Dieudonné; c'est l'algèbre non-commutative  $W(k)\langle F, V \rangle$  où  $F$  et  $V$  vérifient pour tout  $a \in W(k)$  les relations

$$Fa = \sigma(a)F, \quad V\sigma(a) = aV, \quad FV = VF = p.$$

L'algèbre de Dieudonné est une  $W(k)$ -algèbre linéairement topologisée pour la topologie  $V$ -adique. Sauf mention du contraire les  $\mathbb{D}_k$ -module seront des  $\mathbb{D}_k$ -modules à droite. On notera aussi  $k\langle F \rangle \subset \mathbb{D}_k$  (resp.  $k\langle V \rangle \subset \mathbb{D}_k$ ) le sous-anneau engendré par  $F$  (resp.  $V$ ).

1.2.2. Soit  $R$  est une  $k$  algèbre pour tout entier  $n \geq 0$  on peut naturellement munir  $W_n(R)$  d'une structure de  $W(k)$ -module. On vérifie que les  $\{\tau'_n\}_{n \geq 0}$  sont  $\sigma^{-1}: W(k) \rightarrow W(k)$  linéaires [Fon77, III 2.1]. Ainsi  $CW^u(R)$  est naturellement un  $W(k)$ -module et on peut étendre cette construction à  $CW(R)$  (cf [Fon77, III 2.1]).

**Proposition 1.2.** *On a un foncteur*

$$CW_k: (\mathbf{Alg}/k) \rightarrow (\mathbf{TopMod}/\mathbb{D}_k)$$

*des  $k$ -algèbres vers les  $\mathbb{D}_k$ -modules linéairement topologisés.*

□

On renvoie à [Fon77] pour la proposition précédente. En particulier on définit l'action de  $F$  et  $V$  pour tout  $x = [\dots, x_{-i}, \dots, x_{-1}, x_0] \in CW(R)$  par

$$Fx = [\dots, x_{-i}^p, \dots, x_{-1}^p, x_0^p], \quad Vx = [\dots, x_{-(i-1)}, \dots, x_{-2}, x_{-1}].$$

1.2.3.

**Définition 1.3.** Soit  $M$  un  $\mathbb{D}_k$ -module linéairement topologisée. On dit qu'il est  $V$ -réduit si

- (1)  $M/VM$  est de dimension finie sur  $k$ ,
- (2)  $V: M \rightarrow M$  est injectif,
- (3)  $M$  est complet et séparé pour la topologie  $V$ -adique.

En particulier, un  $\mathbb{D}_k$ -module  $V$ -réduit est  $k\langle F \rangle$ -profini. Soit  $M$  un  $\mathbb{D}_k$ -module  $V$ -réduit, soit  $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in M$  une famille telle que sa réduction modulo  $V \cdot M$  forme une  $k$ -base de  $M/VM$ . Alors tout élément  $v \in M$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$v = \sum_{m \geq 0} \sum_{i=1}^d V^m [c_{m,i}] \gamma_i, \text{ où } c_{m,i} \in k.$$

1.2.4. *Dualité.* On pose  $W_{k,\infty} = W(k)[\frac{1}{p}]/W(k)$  le module dualisant. Il est naturellement muni des endomorphismes  $\sigma$  et  $\tau$  ce qui en fait un  $\mathbb{D}_k$ -module. Pour  $M$  un  $\mathbb{D}_k$ -module, on pose  $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{D}_k\text{-mod}}(M, W_{k,\infty})$  le *module dual*. L'association  $M \rightsquigarrow M^*$  définit un foncteur contravariant exact de la catégorie des  $\mathbb{D}_k$ -modules dans elle-même. En particulier on définit  $F^D$  et  $V^D$  pour  $f \in M^*$  par

$$(F^* f)(f) = \sigma \circ f \circ V, \quad (V^* f)(f) = \tau \circ f \circ F.$$

1.3. **Foncteurs en groupes.** Tout les groupes considérés seront supposés commutatifs.

1.3.1.

**Définition 1.4.** Un  $k$ -foncteur en groupes  $G$  est un foncteur covariant

$$G: (\mathbf{Alg}/k) \rightarrow \mathbf{GrpAb}$$

de la catégorie des  $k$ -algèbres dans la catégorie des groupes abéliens. S'il est représentable on dira que c'est un *schéma en groupes affines* sur  $k$  et si l'est représentable par une  $k$ -algèbre finie on dira que c'est un *schéma en groupes fini*. Dans le cas d'un schéma en groupes fini, on définit l'*ordre* de  $G$  comme étant la dimension de son algèbre en tant que  $k$ -espace vectoriel.

Un  $k$ -foncteur en groupes formels  $X$  est un foncteur de la catégorie des algèbre finies sur  $k$  vers celle des groupes abéliens

$$X: (\mathbf{Fin}/k) \rightarrow \mathbf{GrpAb}.$$

Si  $X$  est pro-représentable par une  $k$ -algèbre profinie on dit que c'est un *schéma en groupes formel* sur  $k$ . Les éléments de  $(\mathbf{Fin}/k)$  seront considérés comme des anneaux topologiques munis de la topologie discrète.

**Remarque 1.5.**

- On remarque que si un schéma en groupes formels est représenté par une algèbre finie sur  $k$ , alors on peut l'étendre en un schéma en groupes fini.
- Soit  $X$  un  $k$ -foncteur en groupes formels. Si  $R$  est un anneau profini sur  $k$  on pose

$$X(R) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \Omega_R} X(R/\mathfrak{a}),$$

où  $\Omega_R$  désigne les idéaux ouverts de  $R$ . Ainsi on a étendu  $X$  en un foncteur

$$X: (\mathbf{pro-Fin}/k) \rightarrow \mathbf{GrpAb},$$

de la catégorie des algèbres profinis sur  $k$  vers celle des groupes abéliens. On montre sans difficulté que ce foncteur commute avec les limites projectives filtrantes (cf. [Fon77, II 4.1]).

- On remarque que si on pose

$$\hat{A} = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \Omega_A} A/\mathfrak{a},$$

la *complétion profinie* de  $A$ , alors les  $k$ -foncteurs en groupes formels définis par  $A$  et  $\hat{A}$  sont isomorphes.

- On peut associer à un  $k$ -foncteur en groupes un  $k$ -foncteur en groupes formels en le restreignant aux  $k$ -algèbres finies. Ceci nous donne un foncteur, *le complété formel* de  $G$ , que l'on note

$$G \rightsquigarrow \hat{G}.$$

D'après la remarque précédente, si  $G$  est un schéma en groupes représenté par  $A$ ,  $\hat{G}$  est un schéma en groupes formels représenté par  $\hat{A}$ .

Un morphisme entre  $k$ -foncteurs en groupes (resp. en groupes formels) est une transformation naturelle

$$\eta: G \rightarrow G'$$

telle que pour toute  $k$ -algèbre  $R$  l'application  $\eta_R: G(R) \rightarrow G'(R)$  est un morphisme de groupes. Ainsi les  $k$ -foncteurs en groupes (resp. en groupes formels) forment une catégorie. La sous-catégorie des schémas en groupes (resp. en groupes formels) est une sous-catégorie pleine d'après le lemme de Yoneda. Sans détailler rappelons la proposition suivante (cf. [ABD<sup>+</sup>66], Exposé VII<sub>B</sub> 2.4.2]) qui nous permet en particulier de parler de noyaux et co-noyaux.

**Proposition 1.6.** *Les catégories des schémas en groupes affines et finis sur  $k$  sont abéliennes. De même la catégorie des schémas en groupes formels sur  $k$  est abélienne.*

□

1.3.2. Pour un schéma en groupes affine sur  $k$ , la loi de groupe fonctorielle et ses axiomes se transportent sur sa  $k$ -algèbre en une structure de  $k$ -algèbre de Hopf commutative et co-commutative au sens de [Mil17, Chap. 3 b]. De même pour un schéma en groupes formels sur  $k$  on associe une  $k$ -algèbre de Hopf formelle commutative et co-commutative (appelé bigèbre formel dans [Fon77, II]), qui consiste en les mêmes axiomes qu'une algèbre de Hopf mais où tout les produits tensoriels sont complétés et tous les morphismes sont continus. On renvoie à [Fon77, II 2] et [Fon77, II 4] pour cette proposition qui est une conséquence du lemme de Yoneda.

**Proposition 1.7.**

- Le foncteur  $A \rightsquigarrow \text{Hom}(A, \cdot)$  de la catégorie des  $k$ -algèbres dans la catégorie des foncteurs induit une équivalence de catégories.

$$\{\text{schéma en groupes affine sur } k\} \leftrightarrow \{k\text{-algèbre de Hopf commutative et co-commutative}\}.$$

La quasi-inverse est donnée par  $G \rightsquigarrow G(k[[X]])$ .

- De même le foncteur  $B \rightsquigarrow \text{Hom}^{\text{cont}}(B, \cdot)$  de la catégorie des  $k$ -algèbres profinies dans la catégorie des foncteurs induit une équivalence de catégories.

$$\{k\text{-algèbre de Hopf formelle commutative et co-commutative}\} \leftrightarrow \{\text{schéma en groupes formels sur } k\}.$$

La quasi-inverse est donnée par  $X \rightsquigarrow X(k[[X]])$ .

□

Soit  $G$  un schéma en groupes affine sur  $k$  et  $A$  sa  $k$ -algèbre de Hopf associée. On notera toujours  $m: A \otimes_k A \rightarrow A$  la multiplication et  $\Delta: A \rightarrow A \otimes_k A$  la co-multiplication. L'unité et la co-unité définissent et sont déterminées par une décomposition  $A = k \oplus A^+$  où  $A^+$ , l'idéal d'augmentation de  $A$ , est le noyau de la co-unité et  $k \subset A$  est l'image de l'unité. On ne précisera pas en général l'antipode.

De même si  $X$  est un schéma en groupes formels sur  $k$  de  $k$ -algèbre de Hopf formelle  $B$  on notera  $m: B \hat{\otimes}_k B \rightarrow B$  la multiplication,  $\Delta: B \rightarrow B \hat{\otimes}_k B$  la co-multiplication et  $B^+$  l'idéal d'augmentation.

**Exemple 1.8.** Le foncteur  $W_k$  définit un schéma en groupes affine sur  $k$  et  $\text{CW}_k$  définit un  $k$ -foncteur en groupes. On considèrera aussi  $\widehat{\text{CW}}_k$  le complété formel de  $\text{CW}_k$  comme un  $k$ -foncteur en groupes formels.



1.3.3. On a choisi ici le point de vue fonctoriel, décrivons la relation avec le point de vue géométrique. Pour tout schéma  $X$  sur  $\text{Spec } k$  on définit le foncteur contravariant

$$\mathbf{h}_X = \text{Hom}(\cdot, X) : (\mathbf{Sch}/k) \rightarrow (\mathbf{Ens}).$$

Si ce foncteur est à valeur dans les groupes abéliens on dit que  $X$  est un *schéma en groupe*. À toute  $k$ -algèbre  $A$  on associe un schéma  $\text{Spec}_k A$  sur  $k$ . On appelle les schémas de cette forme des *schémas affines*. Ainsi le foncteur

$$X \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_X(X), \cdot)$$

des schémas en groupes dans les  $k$ -foncteurs en groupes induit une équivalence de catégories

{schéma en groupes représentable par un schéma affine}  $\leftrightarrow$  { $k$ -foncteur en groupes représentables}.

La quasi-inverse est donnée par  $G \rightarrow \text{Spec}_k G(k[X])$ . On renvoie à [ABD<sup>+</sup>66] pour plus de détails. On adoptera parfois ce point de vue, notamment dans la deuxième partie.

1.3.4. On définit maintenant la dualité de Cartier. Soit  $X$  un schéma en groupes formels sur  $k$  d'algèbre de Hopf formelle  $B$ . Alors on pose

$$B^D = \text{Hom}_k^{\text{cont}}(B, k),$$

où  $k$  est muni de la topologie discrète. Alors  $B^D$  est une algèbre de Hopf sur  $k$  muni de la multiplication  $m^D$  et de la co-multiplication  $\Delta^D$  définies pour  $f, f' \in A^D$  par

$$m^D(f \otimes f') = f \hat{\otimes} f' \circ \Delta, \quad \Delta^D(f) = f \circ m.$$

Ainsi  $A^D$  définit  $G^D$ , un schéma en groupes sur  $k$ . On a obtenu un foncteur contravariant de la catégorie des schémas en groupes formels sur  $k$  vers la catégorie des schémas en groupes sur  $k$ . Si  $G$  est un schéma en groupe d'algèbre de Hopf  $A$  on peut de même poser

$$A^{\hat{D}} = \text{Hom}_k(A, k),$$

que l'on munit de la topologie de la convergence simple. C'est alors une  $k$ -algèbre de Hopf formelle et on note le schéma en groupes formels associé  $G^{\hat{D}}$ . Ceci définit un foncteur contravariant de la catégorie des schémas en groupes sur  $k$  vers la catégorie des schémas en groupes formels sur  $k$ . Les deux foncteurs que l'on vient de définir sont des quasi-inverses, on résume ce qui précède dans la proposition suivante (cf. [Fon77, II 5]).

**Proposition 1.9.** *On a une anti-équivalence de catégories*

$$\{\text{schémas en groupes formels sur } k\} \leftrightarrow \{\text{schémas en groupes affines sur } k\},$$

donnée par  $X \rightsquigarrow X^D$  de quasi-inverse  $G \rightsquigarrow G^{\hat{D}}$ .

□

Soit  $G$  un schéma en groupes fini sur  $k$  et  $A$  son algèbre de Hopf. Le dual de Cartier est donné par  $G^D = \text{Hom}_{\text{grp}}(G, \mathbb{G}_m)$ . C'est un schéma en groupes fini sur  $k$  représenté par  $A^D = \text{Hom}_k(A, k)$ , l'algèbre de Hopf duale. Elle est munie de la multiplication  $m^D$  et de la co-multiplication  $\Delta^D$  qui sont définies pour  $f, f' \in A^D$  par

$$m^D(f \otimes f') = f \otimes f' \circ \Delta, \quad \Delta^D(f) = f \circ m.$$

L'association  $G \rightsquigarrow G^D$  définit un foncteur contravariant exact de la catégorie des schémas en groupes finis dans elle-même.

1.3.5. On présente deux opérations fondamentales sur les schémas en groupes affine (resp. formels). Soit  $G$  un schéma en groupes affine d'algèbre de Hopf  $A$ . Soit  $\sigma : k \rightarrow k$  le Frobenius de  $k$ , on définit  $G^\sigma = \text{Hom}(A^\sigma, \cdot)$  où  $A^\sigma = A \otimes_{k, \sigma} k$ . Alors le morphisme

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A^\sigma \\ a & \mapsto & a^\sigma \end{array}$$

définit un morphisme de schémas en groupes  $F_G : G \rightarrow G^\sigma$ , le *Frobenius* de  $G$  sur  $k$ . Si  $X$  est un schéma en groupes formels, on obtient de la même façon  $F_X : X \rightarrow X^\sigma$ . Par la functorialité du dual de Cartier on définit le *décalage*  $V_G : G^\sigma \rightarrow G$  comme le dual de  $F_{G^{\hat{D}}}$ , respectivement  $V_X$  le dual de  $F_{X^{\hat{D}}}$ . On peut donner une description explicite en terme de  $A$  de ce morphisme (cf. [Fon77, II 7.5]). cette description permet alors de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 1.10.** *Pour tout schéma en groupes affine (resp. formel)  $G$  sur  $k$  on a les relations*

$$F_G V_G = V_G F_G = 0.$$

□

1.3.6. On peut maintenant définir plusieurs types de groupes en fonction de l'action du Frobenius et du décalage.

**Définition 1.11.** Soit  $G$  un schéma en groupes affine (resp. formel) sur  $k$ . Alors on dit qu'il est

- (a) *étale* si  $F_G$  est un isomorphisme,
- (b) *multiplicatif* si  $V_G$  est un isomorphisme,
- (c) *connexe* si  $G = \varinjlim_n \ker F_G^n$ ,
- (d) *unipotent* si  $G = \varinjlim_n \ker V_G^n$ .

**Remarque 1.12.**

- Si  $G$  est un schéma en groupes formel il est connexe si et seulement si  $G(\bar{k})$  est le groupe trivial.
- Si  $G$  est un schéma en groupes affine il est étale si et seulement si sa  $k$ -algèbre de Hopf est étale sur  $k$ . Si  $k$  est de caractéristique 0 ceci donne un sens aux groupes affines étales et on verra dans ce cas que les schémas en groupes finiss sont tous étales.
- On remarque que le dual de Cartier d'un schéma en groupes affine sur  $k$  qui est étale est un schéma en groupes formels multiplicatif. De même le dual d'un schéma en groupe connexe est unipotent.

1.3.7. On a la proposition suivante (cf. [Fon77, II 7]) qui permet de se ramener aux cas étale et connexe.

**Proposition 1.13.** *Soit  $G$  un schéma en groupes affine (resp. formel) sur  $k$ . On a une suite exacte canonique*

$$0 \rightarrow G^\circ \rightarrow G \rightarrow G^{et} \rightarrow 0$$

*scindée, telle que  $G^\circ$  est connexe et  $G^{et}$  est étale.*

□

Le schéma en groupes affines  $G^{et}$  est défini pour toute  $k$ -algèbre  $R$  par  $G^{et}(R) = G(R/\mathfrak{r})$  où  $\mathfrak{r}$  est le radical de  $R$  et  $G^\circ = \varinjlim \ker F_G^n$ . De manière équivalente  $G^\circ$  est la composante connexe de l'identité dans  $G$ . Notons que comme  $k$  est parfait  $R/\mathfrak{r}$  s'identifie à la sous  $k$ -algèbre étale maximale de  $R$ , ce qui justifie que la suite est scindée.

1.3.8. Par la classifications des schémas étales sur  $k$  on peut classifier les schémas en groupes affines étales sur  $k$  par leurs  $\bar{k}$ -points munis de l'action linéaire et continue de  $\mathfrak{G} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . On définit un  $k[\mathfrak{G}]$ -module discret comme un  $k[\mathfrak{G}]$ -module linéairement topologisée, on la proposition suivante (cf. [Fon77, II 7.1])

**Proposition 1.14.** *Le foncteur  $X \rightsquigarrow X(\bar{k})$  des schémas en groupes formels sur  $k$  dans les  $k[\mathfrak{G}]$ -modules établit une équivalence de catégories*

$$\{\text{schéma en groupes formels étales sur } k\} \leftrightarrow \{k[\mathfrak{G}]\text{-modules discrets}\}.$$

*Soit  $\Gamma$  un  $k[\mathfrak{G}]$ -module discret sur  $k$ , on définit l'algèbre de Hopf formelle  $\text{Hom}_{k[\mathfrak{G}]}(\Gamma, \bar{k})$  pour la topologie de la convergence simple. Ceci donne la quasi-inverse au foncteur précédent.*

□

**Remarque 1.15.**

- Par la dualité de Cartier cette équivalence donne une classification des schémas en groupes affines multiplicatifs sur  $k$ .
- Cette équivalence se restreint dans le cas fini

$$\{\text{schéma en groupes fini étales sur } k\} \leftrightarrow \{k[\mathfrak{G}]\text{-modules de longueur fini}\}.$$

Par la remarque précédente on a aussi une description des schémas en groupes finiss multiplicatifs sur  $k$

1.3.9. On veut maintenant comprendre les schémas en groupes formels connexes. De manière équivalente par dualité, on va étudier les schémas en groupes affines unipotents.

**Définition 1.16.** Soit  $G$  un  $k$ -foncteur en groupes affine,  $A$  sa  $k$ -algèbre de Hopf. On pose le  $k$ -espace vectoriel  $\omega_G = A^+/(A^+)^2$  les *différentielles invariantes en l'unité* et  $\text{Lie}(G) = \text{Hom}_k(\omega_G, k)$  son *algèbre de Lie*.

De même si  $X$  est un schéma en groupes formels de  $k$ -algèbre de Hopf formelle  $B$ , on pose  $\omega_X = B^+/(B^+)^2$  et  $\text{Lie}(X) = \text{Hom}_k^{\text{cont}}(\omega_X, k)$ .

L'association  $G \rightsquigarrow \text{Lie}(G)$  (resp.  $G \rightsquigarrow \omega_G$ ) définit un foncteur contravariant (resp. covariant) de la catégorie des schémas en groupes affines sur  $k$  dans celle des  $k$ -espaces vectoriels.

**Remarque 1.17.**

- Si  $G$  est un schéma en groupes affines sur  $k$  d'algèbre de Hopf  $A$  on définit  $\Omega_{A/k}$ , les *différentielles de Kähler* comme étant le  $A$ -module tel que pour tout  $A$ -module  $M$  et fonctoriellement en  $M$

$$\text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) \cong \text{Der}_k(A, M) = \{d: A \rightarrow M \mid d \text{ } k\text{-linéaire tel que } d(xy) = xdy + ydx\}.$$

Le théorème de Cartier (cf. [Fon77], II 8.2]) assure alors que  $\Omega_{A/k} \cong \omega_G \otimes_k A$ .

- Notons que par dualité  $\omega_{G^D} = \text{Lie}(G)$  et  $\omega_{X^D} = \text{Lie}(X)$

**Définition 1.18.** Soit  $M$  un  $k$ -espace vectoriel. On définit le schéma en groupes affines sur  $k$

$$\underline{M}: R \rightsquigarrow R \otimes_k M,$$

où  $R \otimes_k M$  est munie de la structure additive.

Ce foncteur est représentable par l'algèbre polynomiale  $\text{Sym}_k(M)$ . Ce foncteur est "adjoint" à  $G \rightsquigarrow \text{Lie}(G)$  dans le sens suivant, (cf. [DG70], IV, §3, 6.2]).

**Proposition 1.19.** Pour tout  $k$ -espace vectoriel  $M$  et tout schéma en groupes affines  $G$  on a un isomorphisme naturel en  $M$  et  $G$

$$\text{Hom}_k(\text{Lie}(G), M) \cong \text{Hom}_{k\text{-grp}}(\underline{M}, G).$$

□

**Définition 1.20.** Soit  $G$  un schéma en groupes affine, l'image de l'identité  $\text{id}_{\text{Lie}(G)}$  par l'isomorphisme précédent définit le *morphisme de Hodge-Tate*

$$\alpha_G: \underline{\text{Lie}}(G) \rightarrow G,$$

qui est naturel en  $G$  par la proposition précédente.

Notons que si  $V_G = 0$  ce morphisme est injectif.

**Remarque 1.21.** Le morphisme de Hodge-Tate est explicite si on le traduit géométriquement et la proposition précédente décrit une adjonction au sens propre du terme dont  $\alpha$  est l'unité. Soit  $G$  un schéma en groupes sur  $k$  que l'on suppose fini, le morphisme de Hodge-Tate s'écrit

$$\alpha_G: G \rightarrow \underline{\omega}_{G^D}.$$

Il est défini pour tout  $u \in G$ , vu par la dualité de Cartier comme un morphisme  $u: G \rightarrow \mathbb{G}_m$ , par

$$\alpha_G(u) = u^* \frac{dT}{T},$$

le tiré en arrière par  $u$  de la forme canonique de  $\mathbb{G}_m$ . De plus pour tout  $k$ -espace vectoriel de dimension fini on a

$$\text{Hom}_k(\text{Lie}(G), M) \cong \text{Hom}_{\text{sch-grp}}(G, \underline{M}).$$

On veut maintenant classifier les  $k$ -foncteurs en groupes finis annulés par leur décalage. Pour  $G$  un schéma en groupes affine le Frobenius  $F_G$  induit une action sur  $\text{Lie}(G)$ , ainsi le foncteur  $G \rightsquigarrow \text{Lie}(G)$  sur les schémas en groupes affines sur  $k$  est à valeur dans la catégorie des modules sur  $k\langle F \rangle = \mathbb{D}_k/\langle V, p \rangle$ . On va voir que ce module caractérise  $G$  s'il est annulé par  $V_G$ . De plus  $M$  est un  $k\langle F \rangle$ -module  $\underline{M}$  est muni de deux Frobenius, l'un induit par  $F$  et  $F_{\underline{M}}$ . On a l'équivalence suivante (cf. [DG70], IV, §3, 6.6-6.7])

**Proposition 1.22.** *Le foncteur  $G \rightsquigarrow \text{Lie}(G)$  de la catégorie des schémas en groupes affines sur  $k$  vers la catégorie des  $k\langle F \rangle$ -modules induit une anti-équivalence de catégories*

$$\{\text{schémas en groupes affines } G \text{ sur } k \text{ tels que } V_G = 0\} \leftrightarrow \{k\langle F \rangle\text{-modules}\}.$$

La quasi-inverse est donnée par

$$M \rightsquigarrow \text{coker} \left[ (F - F_M): \widehat{M}^{\sigma^{-1}} \rightarrow \widehat{M} \right].$$

□

Le lemme suivant nous permet de décrire les schémas en groupes finiss unipotents.

**Lemme 1.23.** *Soit  $G$  est un schéma en groupes fini unipotent, il existe une filtration  $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$  par des sous  $k$ -foncteurs en groupes finis, où  $G_0$  est le  $k$ -foncteurs en groupes trivial et telle que  $V_{G_i/G_{i-1}} = 0$  pour tout  $i$  avec  $0 \leq i \leq n$ .*

□

**Remarque 1.24.** Si  $M$  est un  $k\langle F \rangle$ -module,  $\widehat{M}$  le complété formel de  $M$  est un schéma en groupes formel. Si  $X$  est un schéma en groupes formel les constructions précédentes marchent encore en remplaçant  $M$  par  $\widehat{M}$  et  $G$  par  $X$ . En particulier on a un morphisme de Hodge-Tate

$$\alpha_X: \widehat{\text{Lie}(X)} \rightarrow X,$$

(cf. [ABD<sup>+</sup>66, Exposé VII<sub>B</sub> 2.6.2-2.6.3]).

1.4. **Groupes de Lie formels et  $p$ -divisibles.** On rappelle quelques résultats sur les schémas en groupes formels, notamment leur structure.

1.4.1. Le théorème suivant est démontré dans [Fon77, II 9]

**Théorème 1.25.** *Soit  $X$  un schéma en groupes formel sur  $k$  et  $B$  son algèbre de Hopf. Il existe un ensemble  $J$  et une application  $\nu: J \rightarrow \mathbb{N}$  tels que  $B$  soit isomorphe au quotient de  $k[[x_j]]_{j \in J}$  par l'adhérence de l'idéal engendré par  $\{x_j^{p^{\nu(j)}}\}_{j \in J}$ .*

□

**Remarque 1.26.**

- On a exclu le cas où  $k$  est de caractéristique 0, dans ce cas le théorème sous sa forme dans [Fon77, II 10] implique que tout schéma en groupes fini sur  $k$  est étale, au sens où son algèbre de Hopf est étale sur  $k$ .
- Soit  $G$  un schéma en groupes fini connexe sur  $k$ , soit  $A$  son algèbre de Hopf. Dans ce cas le théorème précédent nous donne qu'il existe un ensemble fini  $J$  et une application  $\nu: J \rightarrow \mathbb{N}^*$  telle que

$$A \cong \frac{k[[x_j]]_{j \in J}}{\langle x_j^{p^{\nu(j)}} \rangle_{j \in J}}.$$

En particulier  $G$  est d'ordre une puissance de  $p$ .

1.4.2. On veut distinguer les schémas en groupes formels qui sont représentables par une algèbre de séries formelles. On dit qu'un schéma en groupes formels  $X$  est *lisse* s'il est exact à droite. En particulier, tout schéma en groupes formel étale est lisse. On appellera *groupe de Lie formel* sur  $k$  un schéma en groupes formel lisse et connexe sur  $k$ . La *dimension* de  $X$  est la dimension de son algèbre de Lie en tant que  $k$ -espace vectoriel. On a directement

**Corollaire 1.27.** *Un groupe de Lie formel sur  $k$  est représentable par une algèbre de séries formelles.*

□

**Remarque 1.28.** En particulier s'il est de dimension fini  $n$ , il est représenté par  $k[[x_1, \dots, x_n]]$ . Ainsi, se donner un groupe de Lie formel de dimension fini sur  $k$  est équivalent à se donner une *loi de groupe formel*, c'est-à-dire  $n$  séries formelles dans  $k[[x, y]]$  satisfaisant les axiomes de groupes. On renvoie à [Haz12] pour plus de détails.

1.4.3. On définit maintenant les groupes  $p$ -divisibles et on rappelle leur relation aux groupes de Lie formels.

Soit  $X$  un  $k$ -foncteur en groupes formel. On considère la multiplication par  $p$ ,  $p: X \rightarrow X$  donnée par la structure de groupe. On définit alors  $X[p^n] = \ker p^n$ . On renvoie à [Mes72, I] pour la définition suivante :

**Définition 1.29.** Soit  $X$  un schéma en groupes formels. On dit que  $X$  est

- un  $k$ -foncteur en  $p$ -groupes formels si  $\varinjlim_n X[p^n] = X$ ,
- $p$ -divisible si le morphisme  $p: X \rightarrow X$  est surjectif.

Un schéma en  $p$ -groupes formels  $p$ -divisible tel que  $X[p]$  est un schéma en groupes fini sur  $k$  est simplement appelé un *groupe  $p$ -divisible*. L'ordre de  $X[p]$  est une puissance de  $p$ , cette puissance est appelée la *hauteur* de  $X$ .

**Remarque 1.30.**

- Les groupes  $p$ -divisibles ne forment pas une catégorie abélienne; en effet le noyaux de la multiplication par  $p$  est un groupe fini.
- Soit  $X$  un groupe  $p$ -divisible. Pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $X[p^n]$  est un schéma en groupes fini sur  $k$  et pour tout entier  $m \geq 0$  on a une suite exacte

$$0 \rightarrow X[p^n] \xrightarrow{i_{n,m}} X[p^{n+m}] \xrightarrow{p^n} X[p^m] \rightarrow 0.$$

On peut ainsi définir un groupe  $p$ -divisible comme un système inductif  $(X[p^n], i_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$  de schémas en groupes finiss sur  $k$  vérifiant la suite exacte précédente (cf. [Tat67, 2.1]).

Si on a un groupe  $p$ -divisible  $X$  défini par un système inductif  $(X[p^n], i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut considérer le *dual de Cartier*  $X^D$  défini par  $(X[p^n]^D, (p^n)^D)_{n \in \mathbb{N}}$ , où les morphismes de transition sont les duaux de la multiplication par  $p$ . L'association  $X \rightsquigarrow X^D$  est fonctorielle et elle définit une anti-équivalence de la catégorie des groupes  $p$ -divisibles dans elle-même (cf. [Tat67, 2.3]). Cette dualité étend la dualité de Cartier des schémas en groupes finiss.

On a la relation suivante entre groupes  $p$ -divisibles et groupes de Lie formels. On renvoie à [Mes72, Chap. II, 2.1.7] pour une preuve.

**Théorème 1.31.** *Le foncteur  $X \rightsquigarrow X[p^\infty] = \varinjlim_n X[p^n]$  définit une équivalence de catégories*  
 $\{\text{Groupes de Lie formels } p\text{-divisibles}\} \leftrightarrow \{\text{groupes } p\text{-divisibles connexes}\}.$

□

## 1.5. Théorie de Dieudonné-Cartier.

1.5.1. On va maintenant définir le module de Dieudonné. On commence par le cas des schémas en groupes finiss sur  $k$ . Soit  $G$  un schéma en groupes fini sur  $k$  d'algèbre de Hopf  $A$ . Par la functorialité des co-vecteurs de Witt on peut étendre la co-multiplication de  $A^D$ ,

$$\Delta^D: \text{CW}_k(A^D) \rightarrow \text{CW}_k(A^D \otimes_k A^D).$$

On pose

$$\mathbb{D}(G) = \{f \in \text{CW}_k(A^D) \mid \Delta^D(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1\}.$$

De manière équivalente on a  $\mathbb{D}(G) = \text{Hom}_{\text{grp}}(G^D, \text{CW}_k)$  les morphismes de foncteurs en groupes. Naturellement  $\mathbb{D}(G)$  est un  $\mathbb{D}_k$ -module à gauche, c'est le *module de Dieudonné covariant* de  $G$ .

Le théorème suivant caractérise les schémas en groupes finiss sur  $k$  en terme d'algèbre semi-linéaire. On renvoie à [Fon77, IV 1.3] pour une démonstration.

**Théorème 1.32.** *Le foncteur  $\mathbb{D}$  établit une équivalence de catégories abéliennes*

$$\{\text{Schémas en groupes commutatifs finis sur } k\} \leftrightarrow \{\mathbb{D}_k\text{-Modules à gauche de longueur fini}\}.$$

La quasi-inverse est donnée par  $M \rightsquigarrow \text{Hom}_{\text{grp}}(M^*, \text{CW}_k(\cdot))$ . On a de plus  $\mathbb{D}(G)/V\mathbb{D}(G) \cong \text{Lie}(G)$  et l'équivalence respecte la dualité de Cartier au sens où

$$\mathbb{D}(G)^* \cong \mathbb{D}(G^D).$$

De plus, si  $G$  est d'ordre une puissance de  $p$ , alors cette puissance est égale à  $\dim_k(\mathbb{D}(G))$ .

1.5.2. De la même façon on peut classifier les groupes  $p$ -divisibles en termes d'algèbre semi-linéaire. Soit  $X$  un  $k$ -foncteur en  $p$ -groupes formels, on pose

$$\mathbb{E}(X) = \text{Hom}_{\text{grp}}(X, \widehat{\text{CW}}_k),$$

où  $\widehat{\text{CW}}_k$  est le groupe formel associé aux co-vecteurs de Witt. Ce foncteur contravariant se restreint en une anti-équivalence d'après [Fon77, IV].

**Théorème 1.33.** *Le foncteur  $\mathbb{E}$  établit une anti-équivalence de catégories abéliennes*

$$\{\text{Schémas en } p\text{-groupes formel}\} \leftrightarrow \{\mathbb{E}_k - \text{Modules à gauche } k\langle F \rangle\text{-profinis}\}.$$

La pseudo-inverse est donnée par  $M \rightsquigarrow \text{Hom}_{\text{grp}}^{\text{cont}}(\widehat{\text{CW}}_k(\cdot), M)$ . Soit  $X$  un schéma en  $p$ -groupes formels, on a  $\mathbb{E}(X)/V\mathbb{E}(X) \cong \text{Lie}(X)$ .

1.5.3. Si  $X$  est un groupe  $p$ -divisible on pose  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^D)$ . Ainsi, par le théorème précédent, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.34.** *Le foncteur  $\mathbb{D}$  établit une équivalence de catégories*

$$\{\text{Groupes } p\text{-divisibles}\} \leftrightarrow \{\mathbb{D}_k - \text{Modules à gauche } V\text{-réduits sans } p\text{-torsion}\}.$$

On a une compatibilité avec la dualité de Cartier au sens où pour un groupe  $p$ -divisible  $X$  on a

$$\mathbb{D}(X)^* = \mathbb{D}(X^D).$$

De plus la hauteur de  $X$  est égale à  $\dim_k \mathbb{D}(X)/p\mathbb{D}(X)$ .

On appelle  $\mathbb{D}(X)$  le *module de Dieudonné* de  $X$ . Cette équivalence est compatible avec celle des schémas en groupes finis sur  $k$ . Par l'exactitude des foncteurs considérés on a immédiatement le lemme suivant.

**Lemme 1.35.** *Soit  $X$  un groupe  $p$ -divisible et  $f: X \rightarrow X$  une isogénie, c'est-à-dire un morphisme dont le noyau  $X[f]$  est un schéma en groupes fini. Alors  $f$  induit un morphisme  $\mathbb{D}(X) \rightarrow \mathbb{D}(X)$  et*

$$\mathbb{D}(X[f]) \cong \mathbb{D}(X)/f\mathbb{D}(X).$$

□

1.6.  $O_D$ -Modules. On suit essentiellement [RZ17] dans cette sous-section.

1.6.1. Commençons par fixer quelques notations. Soit  $K$  une extension finie de degré  $n$  sur  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $O_K \subset K$  son anneau des entiers et  $\kappa$  son corps résiduel de degré  $f$  sur  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $\pi \in O_K$  une uniformisante et  $e \geq 1$  tel que  $\pi^e = p$ . On fixe un entier  $d \geq 2$ . On pose  $\Phi = \text{Hom}(K, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  l'ensemble des plongements de corps et on fixe un plongement  $\varphi_0: K \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ . Soit  $r: \Phi \rightarrow \mathbb{Z}$  une application telle que

$$r_\varphi = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi = \varphi_0 \\ 0 \text{ ou } n & \text{si } \varphi \neq \varphi_0. \end{cases}$$

Le corps de reflex de  $r$  est noté  $E \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$ , il est caractérisé par son groupe de Galois

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/E) = \{\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \mid r_{\sigma\varphi} = r_\varphi\}.$$

On note que  $\varphi_0(F) \subset E$  ce qui nous permet de considérer  $E$  comme une extension de  $F$ .

Soit  $K^t \subset K$  la sous-extension non-ramifiée maximale. On pose  $\Psi = \text{Hom}(K^t, \bar{\mathbb{Q}}_p)$  l'ensemble des plongements de ce corps, et  $\psi_0 = \varphi_0|_{K^t}$ . Pour tout  $\psi \in \Psi$  on note  $\Phi_\psi = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi|_{K^t} = \psi\}$  et on définit des sous-ensembles de  $\Phi_\psi$

$$\begin{aligned} A_\psi &= \{\varphi \in \Phi_\psi \mid r_\varphi = n\}, \\ B_\psi &= \{\varphi \in \Phi_\psi \mid r_\varphi = 0\}, \end{aligned}$$

et on note  $a_\psi = \text{Card}(A_\psi)$ ,  $b_\psi = \text{Card}(B_\psi)$  le cardinal de ces deux ensembles. On pose de plus pour tout  $\psi \in \Psi$

$$r_\psi = \sum_{\varphi \in \Phi_\psi} r_\varphi.$$

On a alors

$$r_\psi = \begin{cases} d^2 a_\psi & \text{si } \varphi_0 \neq \varphi, \\ d^2 a_{\psi_0} + d & \text{si } \varphi_0 = \varphi. \end{cases}$$

1.6.2. Soit  $D$  une algèbre centrale simple sur  $K$  d'invariant  $d$  et  $O_D \subset D$  un ordre maximal. On note  $\Pi \in O_D$  une uniformisante et  $\tilde{K} \subset D$  l'extension non-ramifiée de degré  $d$  de Frobenius  $\tau \in \text{Gal}(\tilde{K}/K)$ . On note le corps résiduel  $\mathbb{F} = O_D/\Pi O_D$ . On notera aussi  $\tilde{K}^t \subset \tilde{K}$  la sous-extension non-ramifiée maximale. On pose comme précédemment  $\tilde{\Psi} = \text{Hom}(\tilde{K}^t, \tilde{\mathbb{Q}}_p)$ . On supposera que  $k \subset \mathbb{F}$ .

**Définition 1.36.** Un  $k$ -espace vectoriel  $L$  muni d'un morphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -algèbres

$$\iota: O_D \rightarrow \text{End}_k(L)$$

est appelé un  $O_D$ -module.

Soit  $(L, \iota)$  un  $O_D$ -module. Notons que  $\Psi \cong \text{Hom}(\kappa, \bar{\mathbb{F}}_p)$  et  $\tilde{\Psi} \cong \text{Hom}(\mathbb{F}, \bar{\mathbb{F}}_p)$ . On en déduit les décompositions

$$O_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} k = \bigoplus_{\psi \in \Psi} k_\psi, \quad O_D \otimes_{\mathbb{Z}_p} k = \bigoplus_{\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}} k_{\tilde{\psi}}.$$

Celles-ci induisent des décompositions

$$L = \bigoplus_{\psi \in \Psi} L_\psi, \quad L = \bigoplus_{\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}} L_{\tilde{\psi}}.$$

**Définition 1.37.** On dit que  $(L, \iota)$  satisfait la *condition du rang* ( $\mathbf{R}_r$ ) si pour tout  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$  on a

$$\dim_k L_{\tilde{\psi}} = r_{\tilde{\psi}},$$

où  $r_{\tilde{\psi}} = r_{\tilde{\psi}|_{\mathbb{F}^t}}$ .

On dit que  $(L, \iota)$  satisfait la *condition d'Eisenstein* ( $\mathbf{E}_r$ ) si pour tout  $\psi \in \Psi$  on a

$$\begin{aligned} \iota(\pi)^{a_{\psi_0}+1} &= 0 \text{ sur } L_{\psi_0}, \\ \wedge^{n+1}(\iota(\pi)^{a_{\psi_0}}) &= 0 \text{ sur } \wedge^{n+1} L_{\psi_0}, \\ \iota(\pi)^{a_\psi} &= 0 \text{ sur } L_\psi \text{ si } \psi \neq \psi_0. \end{aligned}$$

On dit que  $(L, \iota)$  satisfait la *condition de Kottwitz* ( $\mathbf{K}_r$ ) si on a une égalité entre polynômes caractéristiques dans  $k[T]$  :

$$\text{char}(\iota(x) | L) = \prod_{\varphi \in \Phi} \varphi(\text{char}(x))^{r_\varphi}, \quad \forall x \in O_D,$$

où à droite  $\text{char}(x)$  désigne le polynôme caractéristique réduit de  $x \in O_D$ .

On renvoie à [RZ17, 3] pour plus de détails sur ces conditions, on considère ici le cas particulier  $S = \text{Spec } k$ . On a par exemple d'après [RZ17, 3.5] :

**Lemme 1.38.** *Les conditions ( $\mathbf{K}_r$ ) et ( $\mathbf{R}_r$ ) sont équivalentes.*

Notons que si  $(L, \iota)$  satisfait à ( $\mathbf{R}_r$ ), alors pour tout  $\psi \in \Psi$  on a

$$\dim_k L_\psi = \begin{cases} d^2 a_\psi & \text{si } \varphi_0 \neq \varphi, \\ d^2 a_{\psi_0} + d & \text{si } \varphi_0 = \varphi. \end{cases}$$

## 2. SCHÉMA EN $\mathbb{F}$ -VECTORIELS

Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini de caractéristique  $p$  et soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$  contenant  $\mathbb{F}$ . On note  $q = p^r$  le cardinal de  $\mathbb{F}$ . On se propose d'étudier les schémas en groupes finis sur  $k$  muni d'une action de  $\mathbb{F}$ . On note  $\sigma \in \text{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$  le morphisme de Frobenius, qui engendre le groupe de Galois.

### 2.1. Définitions et premières propriétés.



2.1.1.

**Définition 2.1.** Un foncteur covariant  $(\mathbf{Alg}/k) \rightarrow (\mathbf{Vect}/\mathbb{F})$  de la catégorie des  $k$ -algèbres vers la catégorie des  $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels sera appelé *schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels* sur  $k$  s'il est représentable par un schéma fini sur  $k$ .

Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels et  $A$  la  $k$ -algèbre de Hopf associée. Notons :

- $m: A \otimes_k A \rightarrow A$  la multiplication,
- $\Delta: A \rightarrow A \otimes_k A$  la co-multiplication,
- $[\lambda]: A \rightarrow A$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}$  donné par l'action de  $\mathbb{F}$ . Ces morphismes sont tels que  $[1] = \text{id}_A$  et tels que pour tout  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}$  on a

$$[\lambda][\lambda'] = [\lambda\lambda'] \text{ et } [\lambda + \lambda'] = m \circ ([\lambda] \otimes [\lambda']) \circ \Delta, \quad (2.1)$$

- $A^+$  l'idéal d'augmentation de  $A$ , qui est le noyau de la co-unité. Rappelons que  $A = k \oplus A^+$ .

Soit  $\text{End}(A)$  les endomorphismes de l'algèbre de Hopf  $A$ . Comme  $A$  est commutatif et co-commutatif,  $\text{End}(A)$  est un anneau pour la convolution et la composition. La convolution est définie pour tout  $f, g \in \text{End}(A)$  par  $f \star g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ . Ainsi, d'après les relations [2.1](#) on a un morphisme d'anneaux  $\iota: \mathbb{F} \rightarrow \text{End}(A)$  qui donne la structure de  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $G$ .

**Proposition 2.2.** *Le foncteur qui à  $G$  associe la paire  $(A, \iota)$  induit une équivalence de catégories*

$$\{G \text{ schéma en } \mathbb{F}\text{-vectoriels sur } k\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A, \iota), A \text{ Algèbre de Hopf} \\ \text{finie commutative et co-commutative,} \\ \iota: \mathbb{F} \rightarrow \text{End}(A) \\ \text{morphisme d'anneaux} \end{array} \right\}.$$

2.1.2. Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels. Par la proposition précédente on lui associe une paire  $(A, \iota)$ . En tant que  $k$ -espace vectoriel,  $A$  est une représentation linéaire du groupe abélien fini  $\mathbb{F}^\times$ . Comme  $\mathbb{F}^\times$  est d'ordre premier à  $p$ , l'ensemble des représentations irréductibles de  $\mathbb{F}^\times$  est le groupe des caractères multiplicatifs de  $\mathbb{F}^\times$ , c'est-à-dire  $\mathbb{F}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{F}^\times, k)$ . On obtient une décomposition de  $A$  en composantes isotypiques, plus précisément.

**Proposition 2.3.** *Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels,  $(A, \iota)$  la pair associée par la proposition [2.2](#). Alors  $A$  est munie d'une graduation d'algèbre de type  $\mathbb{F}^\times$ .*

$$A = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A_\chi, \quad A_\chi = \{a \in A \mid [\lambda] \cdot a = \chi(\lambda)a, \forall \lambda \in \mathbb{F}^\times\}.$$

**Remarque 2.4.** On vérifie aisément que  $k \subset A_{\chi_0}$  où  $\chi_0$  est le caractère trivial. Ainsi on obtient la décomposition classique dans [Ray74](#).

$$A = k \oplus \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A_\chi^+, \quad A_\chi^+ = \{a \in A^+ \mid [\lambda] \cdot a = \chi(\lambda)a, \forall \lambda \in \mathbb{F}^\times\}.$$

On est intéressé par la dimension des composantes isotypiques de  $A$ . On introduit le caractère de la représentation.

**Définition 2.5.** On conserve les notations de la proposition [2.3](#), on pose alors  $\text{Ch}_k(G)$  le caractère de la représentation  $A$  de  $\mathbb{F}^\times$ . Plus précisément on définit  $\text{Ch}_k(G) \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^\vee]$  par

$$\text{Ch}_k(G) = \sum_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \dim_k(A_\chi)[\chi].$$

**Remarque 2.6.** Bien qu'on en fera pas usage, notons que ce caractère est invariant par changement de base, c'est-à-dire que si  $k'/k$  est une extension de  $k$  alors  $\text{Ch}_k(G) = \text{Ch}_{k'}(G \otimes_k k')$ .

2.1.3. À titre d'exemple classifions les schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels étales. Rappelons qu'on a une équivalence de catégorie entre les schémas en groupes finiss sur  $k$  et les  $k[\text{Gal}(\bar{k}/k)]$ -modules de longueur finie (cf remarque [1.15](#)).

**Corollaire 2.7.** *Le foncteur qui à  $G$  associe le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $G(\bar{k})$ , muni de l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , induit une équivalence de catégories*

$$\{\text{Schémas en } \mathbb{F}\text{-vectoriels étales sur } k\} \leftrightarrow \{\mathbb{F}\text{-représentations de } \text{Gal}(\bar{k}/k)\}.$$



2.1.4. Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $k$  d'algèbre de Hopf  $A$ . Soit  $G^D$  son dual de Cartier et  $A^D$  sa  $k$ -algèbre de Hopf. La dualité de Cartier est une anti-équivalence de catégories et donc on a un isomorphisme d'anneaux  $\text{End}(A) \cong \text{End}(A^D)^{\text{op}}$  avec l'anneau opposé des endomorphismes de l'algèbre de Hopf  $A^D$ . Comme  $\mathbb{F}$  est un anneau commutatif on déduit de la structure de schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $G$  un morphisme d'anneaux

$$\mathbb{F} \rightarrow \text{End}(A^D).$$

Ainsi la proposition [2.2](#) nous assure que  $G^D$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathbb{F}$ -vectoriels.

**Proposition 2.8.** *Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels et soit  $G^D$  son dual de Cartier. Alors  $G^D$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathbb{F}$ -vectoriels et on a*

$$\text{Ch}_k(G) = \text{Ch}_k(G^D).$$

*De plus, cette dualité est une anti-équivalence de la catégories des schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $k$  dans elle-même.*

*Démonstration.* Explicitons cette action dans une base. Soit  $\{x_1, \dots, x_d\}$  une base homogène du  $k$ -espace vectoriel  $A$ , fixons pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq d$  le caractère  $\chi_i \in \mathbb{F}^\vee$  tel que  $v_i \in A_{\chi_i}$ . Soit  $\{x_1^*, \dots, x_d^*\}$  la base duale dans  $A^D$ . On a alors  $[\lambda] \cdot x_i^* = \chi_i(\lambda)x_i^*$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}$  et  $i$  tel que  $1 \leq i \leq d$ . Ceci démontre la proposition.  $\square$

## 2.2. Modules de Dieudonné gradués.

### 2.2.1.

**Définition 2.9.** Soit  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ . On dit que  $\chi$  est *primitif* s'il est additif. On note  $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F}^\vee$  l'ensemble des caractères primitifs. Si  $\kappa \subset \mathbb{F}$  est un sous-corps, on notera  $\mathbb{F}_\kappa^+$  l'ensemble des caractères primitifs  $\kappa$ -linéaires

**Remarque 2.10.**

- Les caractères primitifs correspondent exactement aux éléments primitifs de l'algèbre de Hopf  $k[\mathbb{F}^\vee]$ . C'est pourquoi on préfère cette terminologie à celle de "fondamental" dans [\[Ray74\]](#).
- Soit  $\chi$  un caractère primitif, alors  $\chi^p$  est primitif et  $\mathbb{F}^+ = \{\chi, \chi^p, \chi^{p^2}, \dots, \chi^{p^{r-1}}\}$ .
- On a un isomorphisme non-canonique  $\mathbb{F}^+ \cong \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p)$ , plus précisément  $\mathbb{F}^+$  est un espace principal homogène sous  $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p)$ .

2.2.2. Supposons maintenant que  $G$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels. Soit  $\mathbb{D}(G)$  son module de Dieudonné. Par la functorialité du module de Dieudonné tout  $\lambda \in \mathbb{F}^\times$  induit un automorphisme  $[\lambda] \in \text{Aut}_k(\mathbb{D}(G))$  ce qui fait de  $\mathbb{D}(G)$  une représentation linéaire de  $\mathbb{F}^\times$  de dimension finie sur  $k$ .

**Proposition 2.11.** *Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels, alors on a une décomposition en composantes isotypiques*

$$\mathbb{D}(G) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} \mathbb{D}(G)_\chi, \quad \mathbb{D}(G)_\chi = \{v \in \mathbb{D}(G) \mid [\lambda] \cdot v = \chi(\lambda)v\},$$

telle que  $V$  et  $F$  induisent  $V: \mathbb{D}(G)_{\chi^p} \rightarrow \mathbb{D}(G)_\chi$  et  $F: \mathbb{D}(G)_\chi \rightarrow \mathbb{D}(G)_{\chi^p}$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$ .

*Démonstration.* Le  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{D}(G)$  est une représentation linéaire de  $\mathbb{F}^\times$ , donc comme dans la proposition [2.3](#) on a une décomposition en composantes isotypiques

$$\mathbb{D}(G) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \mathbb{D}(G)_\chi.$$

Soit  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  tel que  $\mathbb{D}(G)_\chi \neq 0$ , montrons que  $\chi$  est primitif. Soit  $f \in \mathbb{D}(G)_\chi$  tel que  $f \neq 0$ , alors pour tout  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}^\times$  on a

$$\chi(\lambda + \lambda')f = [\lambda + \lambda'] \cdot f = m \circ ([\lambda] \otimes [\lambda']) \circ \Delta(f) = (\chi(\lambda) + \chi(\lambda'))f.$$

Donc  $\chi \in \mathbb{F}^+$  ce qui montre la décomposition.

Montrons la compatibilité à  $F$  et  $V$ . Les endomorphismes  $F$  et  $V$  commutent à l'action de  $\mathbb{F}^\times$  ainsi pour  $\chi \in \mathbb{F}^+$  et  $v \in \mathbb{D}(G)_\chi$  on a

$$[\lambda] \cdot F(v) = F([\lambda] \cdot v) = F(\chi(\lambda)v) = \chi^p(\lambda)F(v).$$

Ainsi  $F(v) \in \mathbb{D}(G)_{\chi^p}$ . Le calcul est le même pour  $V$ .  $\square$

**Définition 2.12.** Soit  $M$  un  $\mathbb{D}_k$ -module. Alors on dira que  $M$  est un *module de Dieudonné gradué* sur  $\mathbb{F}^+$  si les conclusions de la proposition précédente sont satisfaites, c'est-à-dire que  $M$  est muni d'une décomposition

$$M = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} M_\chi$$

telle que  $V$  et  $F$  induisent  $V: M_{\chi^p} \rightarrow M_\chi$  et  $F: M_\chi \rightarrow M_{\chi^p}$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$ .

Par le théorème [1.32](#) on a le résultat suivant :

**Théorème 2.13.** On a une équivalence de catégories, donnée par  $G \rightsquigarrow \mathbb{D}(G)$ ,

$\{\text{Schémas en } \mathbb{F}\text{-vectoriels sur } k\} \leftrightarrow \{\text{Modules de Dieudonné de longueur finie gradués sur } \mathbb{F}^+\}.$

2.2.3. On veut établir une relation entre les dimensions des composantes isotypiques de  $G$  et  $\mathbb{D}(G)$ . On introduit donc le caractère d'un module gradué sur  $\mathbb{F}^+$ .

**Définition 2.14.** Soit  $M$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension fini gradué sur  $\mathbb{F}^+$ . On note

$$M = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} M_\chi.$$

On définit alors  $\text{ch}_k(M) \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^+] \subset \mathbb{N}[\mathbb{F}^\vee]$  par

$$\text{ch}_k(M) = \sum_{\chi \in \mathbb{F}^+} \dim_k(M_\chi)[\chi].$$

En particulier ceci définit le caractère d'un module de Dieudonné gradué sur  $\mathbb{F}^+$ .

**Remarque 2.15.** Une telle graduation sur  $M$  induit naturellement une représentation linéaire de  $\mathbb{F}^\times$  sur  $M$ . Alors  $\text{ch}_k(M)$  est le caractère de cette représentation. On dira plus généralement qu'un espace vectoriel muni représentation de  $\mathbb{F}^\times$  est gradué sur  $\mathbb{F}^+$  si les composantes isotypiques non-nulles sont indexées sur  $\mathbb{F}^+$ .

Comme l'ordre de  $\mathbb{F}^\times$  est premier à  $p$ , ce caractère est naturellement additif. c'est-à-dire que pour toute suite exacte de  $k$ -espaces vectoriels gradués sur  $\mathbb{F}^+$ ,

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0,$$

telle que les morphismes respectent la graduation, on a

$$\text{ch}_k(M_2) = \text{ch}_k(M_1) + \text{ch}_k(M_3).$$

Par une récurrence immédiate on a le corollaire de dévissage suivant :

**Corollaire 2.16.** Soit  $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$  un drapeau de  $k$ -espaces vectoriels gradués sur  $\mathbb{F}^+$ , tel que les inclusions respectent les graduations, alors on a

$$\text{ch}_k(M) = \sum_{i=1}^n \text{ch}_k(M_i/M_{i-1}).$$

2.2.4. De même que en (ref. [2.1.4](#)) on construit une graduation sur le dual. Soit  $M$  un module de Dieudonné de longueur finie en tant que  $W(k)$ -module. Soit  $W_\infty = W(k)[\frac{1}{p}]/W(k)$  le module dualisant, alors on a introduit  $M^* = \text{Hom}_{W(k)}(M, W_\infty)$  le *module de Dieudonné dual*. il est muni de  $F^*$  et  $V^*$  définis respectivement par  $V$  et  $F$ . Supposons que  $M$  est un module de Dieudonné gradué sur  $\mathbb{F}^+$ . D'après la remarque [2.15](#) on a une action de  $\mathbb{F}^\times$  sur  $M$  et on en déduit par la functorialité du dual, comme  $\mathbb{F}^\times$  est commutatif, une action de  $\mathbb{F}^\times$  sur  $M^*$ .

**Proposition 2.17.** Soit  $M$  un module de Dieudonné gradué sur  $\mathbb{F}^+$ , alors  $M^*$  est naturellement un module de Dieudonné gradué sur  $\mathbb{F}^+$  et on a

$$\text{ch}_k(M) = \text{ch}_k(M^*).$$

*Démonstration.* Explicitons cette action dans une base, soit  $\{v_1, \dots, v_d\}$  une base homogène de  $M$  et  $\{v_1^*, \dots, v_d^*\}$  la base duale de  $M^*$ . Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq d$  on fixe  $\chi_i \in \mathbb{F}^+$  tel que  $v_i \in M_\chi$ . Ceci est bien une action de  $\mathbb{F}^\times$  car ce dernier est abélien. La graduation sur  $M^*$  est défini par l'action de  $\mathbb{F}^\times$  en posant sur la base duale  $[\lambda] \cdot v_i^* = \chi_i(\lambda)v_i^*$ . Ceci prouve la proposition.  $\square$

**Remarque 2.18.** Soit  $G$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels. Soit  $\mathbb{D}(G)$  son module de Dieudonné. on sait que  $\mathbb{D}(G^D) = \mathbb{D}(G)^*$ . Par la functorialité, les actions de  $\mathbb{F}^\times$  sont compatibles.

2.2.5. Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $k$  d'algèbre de Hopf  $A$ . Soit  $\mathbb{D}(G)$  son module de Dieudonné gradué. Soit  $\omega_G$  les différentielles en la section unité de  $G$ , que l'on considère comme un  $k$ -espace vectoriel. Comme  $A = k \oplus A^+$  et  $A^+$  est gradué sur  $\mathbb{F}^\vee$  et que  $\omega_G = A^+/A^{+2}$ , le  $k$ -espace vectoriel  $\omega_G$  admet une graduation sur  $\mathbb{F}^\vee$  induite par celle de  $A$ . Ainsi  $\text{Lie}(G) \cong \text{Hom}_k(\omega_G, k)$  admet une graduation sur  $\mathbb{F}^\vee$ . Or on a aussi  $\text{Lie}(G) = \mathbb{D}(G)/V\mathbb{D}(G)$ , donc  $\text{Lie}(G)$  admet une graduation sur  $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F}^\vee$  induite par celle de  $\mathbb{D}(G)$ . La functorialité du module de Dieudonné nous assure que :

**Proposition 2.19.** *Le  $k$ -espace vectoriel  $\text{Lie}(G)$  est naturellement muni d'une graduation sur  $\mathbb{F}^+$  qui coïncide avec les graduations induites par  $G$  et  $\mathbb{D}(G)$ . C'est un module de Dieudonné gradué.*

### 3. $\mathbb{F}$ -EXPONENTIELLE ET FORMULE DE CARACTÈRE

#### 3.1. Multiplicativité du caractère.

3.1.1. Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $k$  et  $A$  son algèbre de Hopf. On suppose que  $G$  est connexe, c'est-à-dire que  $A$  est une  $k$ -algèbre Artinienne locale. La proposition 2.3 nous donne une décomposition

$$A = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A_\chi.$$

**Définition 3.1.** Soit  $M$  un  $A$ -module. Supposons que  $M$  est gradué sur  $\mathbb{F}^\vee$ . Alors on dira que  $M$  est un  $A$ -module gradué si pour tout  $\chi, \chi' \in \mathbb{F}^\vee$  on a  $A_\chi \cdot M_{\chi'} \subset M_{\chi\chi'}$ . On dira de plus qu'un élément de  $M_\chi$  est homogène de type  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ .

**Exemple 3.2.** Pour  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ , on note  $A(\chi)$  le  $A$ -module libre de rang 1 muni d'une graduation sur  $\mathbb{F}^\vee$  telle que pour tout  $\mu \in \mathbb{F}^\vee$  on a  $A(\chi)_\mu = A_{\chi\mu}$ . C'est un  $A$ -module gradué. On peut définir de même  $M(\chi)$  pour tout  $A$ -module gradué  $M$ . En particulier on a les  $k(\chi)$  où  $k$  est muni de la graduation triviale.

**Proposition 3.3.** *Soit  $M$  un  $A$ -module gradué et libre de rang  $d$  sur  $A$ . Alors on a une décomposition*

$$M = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A(\chi)^{d_\chi},$$

telle que  $\sum_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} d_\chi = d$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'il existe une  $A$ -base de  $M$  constituée d'éléments homogènes. On considère  $M_k = M \otimes_A k$  qui est un  $k$ -module gradué sur  $\mathbb{F}^\vee$ ,

$$M_k = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} k(\chi)^{d_\chi}.$$

De plus,  $M \rightarrow M_k$  est surjectif et respecte la graduation car  $k \subset A_{\chi_0}$ , c'est-à-dire que  $M_\chi \rightarrow k(\chi)^{d_\chi} \subset M_k$  est surjectif pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ . Ainsi pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  on peut fixer un ensemble à  $d_\chi$  éléments homogènes  $\mathfrak{B}_\chi \subset M_\chi$  tels que leurs images dans  $M_k$  forment une  $k$ -base de  $k(\chi)^{d_\chi}$ . On pose  $\mathfrak{B} = \cup \mathfrak{B}_\chi$ , c'est un ensemble à  $d$  éléments que nous notons  $v_1, \dots, v_d$ . Par le lemme de Nakayama,  $\mathfrak{B}$  est une famille génératrice de  $M$  en tant que  $A$ -module. Donc on a une surjection de  $A$ -modules

$$\begin{aligned} A^d &\rightarrow M \\ (x_1, \dots, x_d) &\mapsto \sum_{i=1}^d x_i \cdot v_i. \end{aligned}$$

Or, c'est une surjection entre  $k$ -espaces vectoriels de même dimension et donc c'est un isomorphisme de  $A$ -modules. Donc  $\mathfrak{B}$  est une  $A$ -base homogène de  $M$ .  $\square$

3.1.2. On déduit de la proposition précédente une formule de dimension des composantes isotypiques.

**Corollaire 3.4.** *On conserve les notations et hypothèses de la proposition 3.3. On a alors*

$$\dim_k(M_\chi) = \sum_{\mu\mu'=\chi} d_\mu \dim_k(A_{\mu'}).$$

Soit  $G_1, G_2$  deux schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels connexes sur  $k$  et  $A_1, A_2$  leurs algèbres de Hopf respectives. Supposons que l'on a une injection  $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2$ , alors  $A_2$  est libre sur  $A_1$  (cf. [ABD<sup>+</sup>66, Exposé VII<sub>B</sub> 2.4]). On peut donc appliquer la proposition précédente qui donne une décomposition

$$A_2 = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A_1(\chi)^{d_\chi}. \quad (3.1)$$

**Proposition 3.5.** *Soit  $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 0$  une suite exacte de schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels connexes. Alors*

$$\text{Ch}_k(G_2) = \text{Ch}_k(G_1) \text{Ch}_k(G_3)$$

*Démonstration.* Soit  $A_i$  la  $k$ -algèbre de Hopf associée à  $G_i$  pour tous  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Alors  $A_2$  est libre sur  $A_1$  et on a la décomposition 3.1. Or  $A_3 = A_2 \otimes_{A_1, \epsilon} k$  où  $\epsilon: A_1 \rightarrow k$  est la co-unité. Ainsi

$$A_3 = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} k(\chi)^{d_\chi},$$

en particulier  $d_\mu = \dim_k(A_{3, \mu})$  pour tout  $\mu \in \mathbb{F}^\vee$ . Par le corollaire 3.4 on a pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  la relation

$$\dim_k(A_{2, \chi}) = \sum_{\mu\mu'=\chi} \dim_k(A_{3, \mu}) \dim_k(A_{1, \mu'}),$$

ce qui prouve la multiplicativité du caractère.  $\square$

**Remarque 3.6.** On comprend mieux ce qu'il se passe géométriquement, comme il est écrit dans [ABD<sup>+</sup>66, Exposé VII<sub>B</sub> 2.4]. Dans la proposition précédente, si on considère plutôt  $G_i = \text{Spec } A_i$  comme des foncteurs contravariant on a

$$0 \rightarrow G_3 \rightarrow G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow 0.$$

Alors d'après [ABD<sup>+</sup>66, Exposé VII<sub>B</sub> 2.4],  $G_2 \rightarrow G_1$  est topologiquement plat et donc  $A_2$  est libre sur  $A_1$ . De plus, on a  $G_3 = G_2 \times_{G_1} \text{Spec } k$  pour la section unité  $\text{Spec } k \rightarrow G_1$ , ce qui justifie que  $A_3 = A_2 \otimes_{A_1, \epsilon} k$ .

Par une récurrence immédiate on obtient le corollaire de dévissage suivant,

**Corollaire 3.7.** *Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels muni d'une filtration  $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$  de sous-schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels fermés telle que  $G_0$  soit le schéma en groupe trivial sur  $k$ . Alors pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , le schéma en groupes  $G_i/G_{i-1}$  est naturellement un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels et*

$$\text{Ch}_k(G) = \prod_{i=1}^n \text{Ch}_k(G_i/G_{i-1}).$$

## 3.2. Formule des caractères.

### 3.2.1.

**Définition 3.8.** On appellera  $\mathbb{F}$ -exponentielle l'application multiplicative  $\exp_{\mathbb{F}}: \mathbb{N}[\mathbb{F}^+] \rightarrow \mathbb{N}[\mathbb{F}^\vee]$  définie pour  $f = \sum_{\chi \in \mathbb{F}^+} n_\chi[\chi] \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^+]$  par

$$\exp_{\mathbb{F}}(f) = \prod_{\chi \in \mathbb{F}^+} (1 + [\chi] + [\chi^2] + \dots + [\chi^{p-1}])^{n_\chi}.$$

Par *multiplicatif* on entend que  $\exp_{\mathbb{F}}(f+g) = \exp_{\mathbb{F}}(f) \exp_{\mathbb{F}}(g)$  pour tout  $f, g \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^+]$ . Le but est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 3.9.** *Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels, alors*

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \exp_{\mathbb{F}}(\mathrm{ch}_k(\mathbb{D}(G))).$$

Pour cela on va réaliser un dévissage de  $G$  par des schémas en groupes annulés par  $V$ , puis utiliser la multiplicativité du caractère.

3.2.2. *Le cas annulé par  $V$ .* Soit  $G$  un schéma en groupes finis sur  $k$  d'algèbre de Hopf  $A$ . On a construit dans la proposition 1.19 l'application de Hodge-Tate

$$\alpha_G: \underline{\mathrm{Lie}}(G) \rightarrow G.$$

Supposons que  $G$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels, alors d'après la proposition 2.19  $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$  est naturellement gradué sur  $\mathbb{F}^+$ . Cette graduation s'étend multiplicativement en une graduation sur  $\mathbb{F}^V$  de  $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ . Comme le morphisme de Hodge-Tate est naturel il respecte les graduations. Supposons que  $G$  est annulé par son Verschiebung  $V$ . D'après la proposition 1.22,  $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$  est un  $k\langle F \rangle$ -module et on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G)^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{F - F_{\underline{\mathrm{Lie}}(G)}} \underline{\mathrm{Lie}}(G) \xrightarrow{\alpha_G} G \rightarrow 0.$$

Or  $\underline{\mathrm{Lie}}(G) \cong \mathbb{D}(G)/V\mathbb{D}(G) = \mathbb{D}(G)$  car le Verschiebung est nul sur  $\mathbb{D}(G)$  et les graduations coïncident par la proposition 2.19. Donc  $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$  est représenté par  $\mathrm{Sym}(\mathbb{D}(G))$  et les graduations induites coïncident.

Soit  $x_1, \dots, x_n$  une base homogène de  $\mathbb{D}(G)$  et  $\chi_i \in \mathbb{F}^+$  le caractère tel que  $x_i \in \mathbb{D}(G)_{\chi_i}$ . Soit  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , on a

$$\mathrm{ch}_k(\mathbb{D}(G)) = \sum_{i \in I} [\chi_i].$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \prod_{i \in I} \left( \sum_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}} [\chi_i^k] \right).$$

Soit  $V = \{0, \dots, p-1\}^I$ , l'ensemble des fonctions de  $I$  à valeur dans  $\{0, \dots, p-1\}$ . Alors on veut montrer que

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \sum_{k \in V} \left[ \prod_{i \in I} \chi_i^{k(i)} \right]. \quad (3.2)$$

On a d'après la description précédente qu'il existe  $a_{i,j} \in k$ , pour tout  $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , tel que

$$A = \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\langle P_i \rangle_{i \in I}}, \quad \text{où pour tout } i \in I, P_i = x_i^p - \sum_{j \in I} a_{i,j} x_j.$$

Donc la famille  $\{x_1^{k(1)} \dots x_n^{k(n)}\}_{k \in V}$  est une base homogène de  $A$  sur  $k$ . En particulier pour  $k \in V$  on a  $x_1^{k(1)} \dots x_n^{k(n)} \in A_{\chi_1^{k(1)} \dots \chi_n^{k(n)}}$ . Ceci montre précisément (3.2).

**Remarque 3.10.** Notons que ce cas inclu le cas où  $G$  est étale.

3.2.3. *Le cas où  $V$  est nilpotent.* Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels tel que son décalage  $V$  est nilpotent. Alors on a construit au lemme 1.23 une filtration  $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$  par des sous-schémas en groupes fermés où  $G_0$  est le schéma en groupes trivial sur  $k$  et telle que  $G_i/G_{i-1}$  est un schéma en groupes fini annulé par  $V$  pour tous  $i$  avec  $0 \leq i \leq n$ . Le module de Dieudonné  $\mathbb{D}(G)$  admet une filtration  $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = \mathbb{D}(G)$  telle que  $M_i = \mathbb{D}(G_i)$  pour tout  $i$  avec  $0 \leq i \leq n$ .

Explicitons la suite et montrons que  $G_i$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels, pour tout  $i$  entier tel que  $1 \leq i \leq n$ . Fixons un tel entier  $i$ . D'après 2.13 il suffit de construire  $M_i$  gradué sur  $\mathbb{F}^+$ . Soit  $n$  l'ordre de nilpotence de  $V$  sur  $\mathbb{D}(G)$ . On pose  $M_i = (V)^{n-i} \mathbb{D}(G)$ , il est donc bien gradué sur  $\mathbb{F}^+$  car  $V$  respecte la graduation et les quotients successifs sont annulés par  $V$ .

Par le corollaire 3.7 on a

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Ch}_k(G_i/G_{i-1}).$$

Or comme  $\mathbb{D}((G_i/G_{i-1})) = M_i/M_{i-1}$  car le foncteur  $G \rightarrow \mathbb{D}(G)$  est exact, le théorème 3.9 que l'on vient de démontrer pour les schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels annulés par leur décalage et la multiplicativité du caractère nous donne que

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \prod_{i=1}^n \exp_{\mathbb{F}}(\mathrm{ch}_k(M_i/M_{i-1})) = \exp_{\mathbb{F}}\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{ch}_k(M_i/M_{i-1})\right).$$

Finalement on conclut par le corollaire 2.16

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \exp_{\mathbb{F}}(\mathrm{ch}_k(\mathbb{D}(G))).$$

Ceci démontre le théorème 3.9 dans le cas où  $G$  est bi-connexe. Il reste donc à traiter le cas où  $G$  est multiplicatif qui s'en déduit par dualité.

3.2.4. *Le cas multiplicatif.* Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels qui est un schéma en groupes fini multiplicatif. Alors  $G^D$  est muni d'une structure de schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels par dualité. Or  $G^D$  est étale et on sait dans ce cas que le théorème est vrai (cf. remarque 3.10) donc

$$\mathrm{Ch}_k(G^D) = \exp_{\mathbb{F}}(\mathrm{ch}_k(\mathbb{D}(G)^*)).$$

Or, d'après les discussions sur les dualités on en déduit que

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \exp_{\mathbb{F}}(\mathrm{ch}_k(\mathbb{D}(G))).$$

Ceci conclut la preuve du théorème 3.9. □

### 3.3. Application de la formule de caractère : les schémas de Raynaud.

**Définition 3.11.** Soit  $M$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension fini gradué sur  $\mathbb{F}^+$ . Alors on dit que  $M$  est *spécial* si  $\dim_k(M_\chi) = 1$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$ .

On rappelle aussi qu'un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels  $G$  de  $k$ -algèbre de Hopf  $A$  est un *schéma de Raynaud* si dans la décomposition de la remarque 2.4 on a  $\dim_k A_\chi^+ = 1$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ . D'après la remarque 2.4 ceci est équivalent à ce que pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$

$$\dim_k A_\chi = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial,} \\ 2 & \text{si } \chi \text{ est trivial.} \end{cases} \quad (3.3)$$

**Proposition 3.12.** Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $k$  alors  $G$  est un schéma de Raynaud si et seulement si  $\mathbb{D}(G)$  est spécial.

*Démonstration.* Supposons que  $\mathbb{D}(G)$  est spécial. D'après le théorème 3.9 on a

$$\mathrm{Ch}_k(G) = \prod_{\chi \in \mathbb{F}^+} (1 + [\chi] + \cdots + [\chi^{p-1}]).$$

Comme tout caractère  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  non-trivial admet une décomposition unique  $p$ -adique en caractères primitifs, et que  $\prod_{\chi \in \mathbb{F}^+} \chi^{p-1}$  est le caractère trivial  $\chi_0$  on obtient que

$$\mathrm{Ch}_k(G) = 1 + \sum_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} [\chi]$$

On trouve bien la relation 3.3. La réciproque s'obtient de la même façon. □

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 3.13.** Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels de  $k$ -algèbre de Hopf  $A$ , alors  $G$  est un schéma de Raynaud si et seulement si pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$  on a  $\dim_k A_\chi = 1$ .

4.  $O_D$ -MODULES FORMELS

On reprend les notations de la sous-section [1.6](#) que l'on rappelle. Soit  $K$  une extension fini de  $\mathbb{Q}_p$ , on note  $O_K$  son anneau des entiers,  $\pi \in O_K$  une uniformisante et  $\kappa$  son corps résiduel de degré  $f$  sur  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $D$  une algèbre à division sur  $K$  d'invariant  $1/d$  pour  $d \geq 1$ . Soit  $O_D \subset D$  un ordre maximal. Soit  $\tilde{K}$  l'extension non-ramifié de degré  $d$  incluse dans  $D$  et  $O_{\tilde{K}}$  son anneau des entiers qui est inclus dans  $O_D$ . Soit  $\Pi \in O_D$  une uniformisante telle que  $\Pi^d = \pi$ . Le corps résiduel  $\mathbb{F} = O_D/\Pi O_D$  est un corps fini à  $q^d$  éléments contenant le corps résiduel de  $K$ . Soit  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p)$  le Frobenius, on note  $\tau = \sigma^f$ , c'est le Frobenius de  $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ . On considère toujours  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$  contenant  $\mathbb{F}$ , avec ici  $r = fd$ .

## 4.1. Généralités.

**Définition 4.1.** On dira que  $X$  est un  $O_D$ -module  $p$ -divisible si  $X$  est un groupe  $p$ -divisible muni d'un morphisme d'anneaux

$$\iota: O_D \rightarrow \text{End}(X).$$

On dira qu'il est  $r$ -spécial si le  $O_D$ -module  $(\text{Lie}(X), d\iota)$  satisfait les conditions  $(\mathbf{R}_r)$  et  $(\mathbf{E}_r)$ .

Soit  $X$  un  $O_D$ -module  $p$ -divisible et soit  $\mathbb{D}(X)$  son module de Dieudonné. Par la functorialité du module de Dieudonné,  $\mathbb{D}(X)$  est muni d'une action de  $O_D$ . Or comme  $\mathbb{F} \subset k$  on a

$$\mathbb{W}(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{\tilde{K}} = \bigoplus_{\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}} \mathbb{W}(k)_{\tilde{\psi}}.$$

Ainsi  $\mathbb{D}(X)$  est gradué sur  $\tilde{\Psi} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\tilde{K}, \tilde{\mathbb{Q}}_p) \cong \text{Hom}_{\kappa}(\mathbb{F}, \bar{\mathbb{F}}_p) \cong \mathbb{F}^+$ . Plus précisément on a

$$\mathbb{D}(X) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} \mathbb{D}(X)_{\chi}$$

et  $F$ ,  $\Pi$  et  $V$  sont respectivement de degré 1,  $f$  et  $-1$  c'est-à-dire pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$  les restrictions aux composantes isotypiques donnent

$$F: \mathbb{D}(X)_{\chi} \rightarrow \mathbb{D}(X)_{\chi^p}, \quad \Pi: \mathbb{D}(X)_{\chi} \rightarrow \mathbb{D}(X)_{\chi^q} \text{ et } V: \mathbb{D}(X)_{\chi^p} \rightarrow \mathbb{D}(X)_{\chi}.$$

De plus, ces trois opérateurs commutent. On a le raffinement suivant du théorème [1.33](#). On renvoie à [\[BC91\]](#) pour une preuve

**Proposition 4.2.** *On a une équivalence de catégories exactes*

$$\{O_D\text{-modules } p\text{-divisibles sur } k\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Modules de Dieudonné gradués sur } \mathbb{F}^+, \\ V\text{-réduit sans } p\text{-torsion} \\ + \text{endomorphisme } \Pi \text{ de degré } f \\ \text{tel que } \Pi^d = \pi \end{array} \right\}.$$

Notons de plus que comme  $V$  est gradué,  $\mathbb{D}(X)/V\mathbb{D}(X) \cong \text{Lie}(X)$  est naturellement gradué et cette graduation correspond à celle donnée par la structure de  $O_D$ -module  $(\text{Lie}(X), d\iota)$ .

**4.2. Points de  $\Pi$ -torsion.** Soit  $X$  un  $O_D$ -module  $p$ -divisible,  $X[\Pi] = \ker\left(X \xrightarrow{\Pi} X\right)$  les points de  $\Pi$ -torsion de  $X$ . C'est un schéma en groupes fini sur  $k$ . L'action de  $O_D$  sur  $X$  induit une action de  $\mathbb{F} = O_D/\Pi O_D$  sur  $X[\Pi]$  qui en fait un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels. D'après [1.35](#) on a un isomorphisme de  $\mathbb{D}_k$ -modules

$$\mathbb{D}(X)/\Pi\mathbb{D}(X) \cong \mathbb{D}(X[\Pi]).$$

Le  $\mathbb{D}_k$ -module  $\mathbb{D}(X[\Pi])$  est de longueur finie et d'après la proposition [4.2](#), comme  $\Pi$  est gradué, il est gradué sur  $\mathbb{F}^+$ ,

$$\mathbb{D}(X[\Pi]) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} \mathbb{D}(X[\Pi])_{\chi}.$$

C'est un module de Dieudonné gradué. Comme l'action de  $\Pi$  commute avec celle de  $V$ , on a la proposition suivante :

**Proposition 4.3.** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(X) & \xrightarrow{\text{mod } V} & \text{Lie}(X) \\ \downarrow \text{mod } \Pi & & \downarrow \text{mod } \Pi \\ \mathbb{D}(X[\Pi]) & \xrightarrow{\text{mod } V} & \text{Lie}(X[\Pi]). \end{array} \quad (4.1)$$

*commute et toute les flèches respectent les graduations.*

On commence par un lemme essentiellement démontré dans [RZ17, 4.3].

**Lemme 4.4.** *Soit  $X$  un  $O_D$ -module  $p$ -divisible. Alors pour tout  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$ ,  $\dim_k \text{Lie}(X)_{\sigma\tilde{\psi}} = \dim_k \text{Lie}(X)_{\tilde{\psi}}$  si et seulement  $\dim_k \mathbb{D}(X[\Pi])_{\chi}$  est indépendant de  $\chi \in \mathbb{F}^+$ .*

*Démonstration.* Si on note  $M = \mathbb{D}(X)$ , on a

$$M = \bigoplus_{\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}} M_{\tilde{\psi}}.$$

Pour tout  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$  le décalage induit un morphisme  $V: M_{\tilde{\psi}\sigma} \rightarrow M_{\tilde{\psi}}$  et l'uniformisante  $\Pi: M_{\tau\tilde{\psi}} \rightarrow M_{\tilde{\psi}}$ . Le décalage est injectif et comme les sommants de  $M$  sont libres sur  $W(k)$  ils sont tous de même rang. Soit  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$ , considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_{\tau\tilde{\psi}\sigma} & \xrightarrow{V} & M_{\tau\tilde{\psi}} \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\ M_{\tilde{\psi}\sigma} & \xrightarrow{V} & M_{\tilde{\psi}} \end{array} \quad (4.2)$$

Alors on voit que les co-noyaux des flèches verticales sont de même longueur si et seulement si les co-noyaux des flèches horizontales le sont. Ce qui démontre le lemme  $\square$

On en déduit

**Corollaire 4.5.** *Soit  $X$  un  $O_D$ -module  $p$ -divisible de hauteur  $d^2n$  satisfaisant  $(\mathbf{R}_r)$ , alors  $X[\Pi]$  est un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud.*

*Démonstration.* D'après la proposition [3.12] il suffit de montrer que  $\mathbb{D}(X[\Pi])$  est spécial, c'est-à-dire que pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^+$ ,  $\dim_k \mathbb{D}(X[\Pi])_{\chi} = 1$ . Or comme  $X$  satisfait  $(\mathbf{R}_r)$ ,

$$\dim_k \text{Lie}(X)_{\tau\tilde{\psi}} = \dim_k \text{Lie}(X)_{\tilde{\psi}}, \quad \forall \tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}.$$

Ainsi tout les  $\mathbb{D}(X[\Pi])_{\chi}$  ont même dimension sur  $k$ , et comme  $\dim_k \mathbb{D}(X[\Pi]) = fd$ , on en déduit que  $\mathbb{D}(X[\Pi])$  est spécial.  $\square$

**Remarque 4.6.** La conclusion ne dépend que de la hauteur et de l'égalité  $\dim_k \text{Lie}(X)_{\sigma\tilde{\psi}} = \dim_k \text{Lie}(X)_{\tilde{\psi}}$  pour tout  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$ . Si on affaiblit l'hypothèse que  $X$  satisfait  $(\mathbf{R}_r)$  à cette égalité de dimension le corollaire précédent devient une équivalence.

#### 4.3. $O_D$ -modules formels spéciaux.

**Définition 4.7.** Soit  $X$  un  $O_D$ -module  $p$ -divisible. On dit qu'il est *strict* si le  $O_D$ -module  $(\text{Lie}(X), d\iota)$  est tel que

$$\text{Lie}(X)_{\psi} = \{0\} \text{ pour tout } \psi \in \Psi \text{ tel que } \psi \neq \psi_0.$$

En d'autres termes, l'action de  $O_D$  sur  $\text{Lie}(X)$  se fait par un unique plongement.

On dit que  $X$  est un  $O_D$ -module  $p$ -divisible *spécial* s'il est strict et si l'action de  $O_{\tilde{K}}$  sur  $\text{Lie}(X)$  en fait un  $k \otimes_{O_K} O_{\tilde{K}}$ -module libre de rang 1. On dira aussi dans ce cas que le module de Dieudonné  $\mathbb{D}(X)$  est un *module de Dieudonné spécial*.

Si on pose  $r^\circ: \Phi \rightarrow \mathbb{Z}$  l'application telle que  $r_{\varphi_0}^\circ = 1$  et  $r_\varphi^\circ = 0$  si  $\varphi \neq \varphi_0$ , alors  $X$  est spécial si et seulement s'il satisfait  $(\mathbf{R}_{r^\circ})$ . Dans ce cas  $\text{Lie}(X)$  est un  $k$ -module gradué sur  $\mathbb{F}^+$ ,

$$\text{Lie}(X) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} \text{Lie}(X)_{\chi},$$



et  $\dim_k(\mathrm{Lie}(X)_\chi) = 1$  si  $\chi \in \mathbb{F}^+$  est  $\kappa$ -linéaire et  $\dim_k(\mathrm{Lie}(X)_\chi) = 0$  sinon. On note  $\mathbb{F}_\kappa^+ \subset \mathbb{F}^+$  l'ensemble des caractères  $\kappa$ -linéaires. On remarque que  $X$  est strict si et seulement si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+} \mathrm{Lie}(X)_\chi.$$

Une conséquence direct du lemme 4.4 est :

**Corollaire 4.8.** *Soit  $X$  un  $\mathcal{O}_D$ -module  $p$ -divisible strict de hauteur  $d^2n$  et de dimension  $n$ . Alors  $X$  est spécial si et seulement si  $X[\Pi]$  est un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud.*

*Démonstration.* Si  $X$  est strict on a

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+} \mathrm{Lie}(X)_\chi.$$

Notons que  $\mathbb{F}_\kappa^+$  est un espace principal homogène sous  $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$  qui est d'ordre  $d$ . Or d'après le lemme 4.4,  $\dim_k \mathrm{Lie}(X)_\chi$  est indépendant de  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$  si et seulement si  $\dim_k \mathbb{D}(X[\Pi])_\chi$  est indépendant de  $\chi \in \mathbb{F}^+$ . Par hypothèse  $\mathbb{D}(X[\Pi])$  est de dimension  $fd$  et  $\mathrm{Lie}(X)$  est de dimension  $d$  sur  $k$ . On en déduit le corollaire.  $\square$

## Deuxième partie 2. Sur le premier revêtement de l'espace de Drinfeld

### 5. QUELQUES STRUCTURES DE NIVEAUX

Nous commençons par faire quelques rappelles sur deux structures de niveaux : une introduite dans le cadre des schémas en groupes finis par R. Kottwitz et P. Wake dans [KP17] ; une autre introduite dans le cadre des schémas par N. Katz et B. Mazur dans [KM85] qu'ils utilisent dans le cas des courbes elliptiques.

#### 5.1. Sections non-nulles.

5.1.1. Soit  $S$  un schéma qui sera notre schéma de base, et soit  $G = \mathrm{Spec} \mathcal{A}$  un schéma en groupes commutatifs fini, plat et de présentation finie sur  $S$ . Soit  $G^D = \mathrm{Spec} \mathcal{A}^D$  son dual de Cartier, que R. Kottwitz et P. Wake interprètent comme des distributions sur  $\mathcal{A}$ . On introduit quelques notations :

- Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A}^D \rightarrow \mathcal{O}_S$  l'accouplement naturel.
- Soit " $\cdot$ " la multiplication dans  $\mathcal{A}$  et " $\star$ " celle de  $\mathcal{A}^D$  que l'on peut interpréter comme la convolution.
- On note " $1$ " l'unité de  $\mathcal{A}$  et " $\delta$ " l'unité de  $\mathcal{A}^D$  qui correspond à la co-unité de  $\mathcal{A}$ . De plus  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{I}$  avec  $\mathcal{I}$  le noyau de  $\delta$ .
- Notons de plus que  $\mathcal{A}$  est munie d'une action de  $\mathcal{A}^D$  que nous noterons aussi " $\star$ " et inversement  $\mathcal{A}^D$  est munie d'une action de  $\mathcal{A}$  que nous noterons toujours " $\cdot$ ". Ce sont respectivement le produit et la convolutions entre distributions et fonctions.

On considère le *fibré en droites des mesures  $G$ -invariantes*

$$D_G = \{\mu \in \mathcal{A}^D \mid \nu \star \mu = 0, \forall \nu \in \mathcal{I}\}.$$

De même on a le *fibré en droites des mesures  $G^\vee$ -invariantes*

$$J_G = \{f \in \mathcal{A} \mid k \cdot f = \langle \delta, k \rangle f, \forall k \in \mathcal{A}\}.$$

On note que  $J_G$  est l'idéal des éléments de  $\mathcal{A}$  qui, vus comme endomorphismes de  $\mathcal{A}$ , sont nuls sur  $\mathcal{I}$ . Ainsi  $J_G$  est le dual de  $D_G$ . En effet pour  $T$  un  $S$ -schéma, si  $g = g_1 + g_2 \in \mathcal{A}(T)$  avec  $g_1 \in \mathcal{O}_S(T)$  et  $g_2 \in \mathcal{I}(T)$  on a  $\langle \delta, g \rangle = g_1$ .

5.1.2. D'après l'annexe de l'article [Ray74](#) de M. Raynaud on a les propriétés suivantes.

**Proposition 5.1.**

- (a) L'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit un accouplement parfait entre  $D_G$  et  $J_G$ .
- (b)  $D_G$  est un sommant direct, localement libre de rang 1, de  $\mathcal{A}^D$ .
- (c) Le morphisme  $\mathcal{A} \otimes_S D_G \rightarrow \mathcal{A}^D$ , obtenu par restriction de l'action de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{A}^D$ , est un isomorphisme de  $\mathcal{A}$ - et de  $\mathcal{A}^D$ -modules. Les structures de modules à gauche sont données pour  $f \otimes \mu \in \mathcal{A} \otimes_S D_G$  et  $g \in \mathcal{A}$  par l'action  $g \cdot (f \otimes \mu) = (g \cdot f) \otimes \mu$  et pour  $\nu \in \mathcal{A}^D$  par l'action  $\nu \star (f \otimes \mu) = (\nu \star f) \otimes \mu$ .

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 5.2.** (a) Si  $\mathcal{A}$  est localement libre sur  $S$ , le quotient  $\mathcal{A}/J_G$  est localement libre et donc plat sur  $S$ .

- (b) Pour  $R$  une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre. On a alors

$$D_G(\mathcal{A}^D) \xrightarrow{\sim} D_{G_R}(\mathcal{A}^D \otimes_S R), \quad J_G(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} J_{G_R}(\mathcal{A} \otimes_S R).$$

Ainsi la formation de  $D_G$  et  $J_G$  commute à l'extension des scalaires.

5.1.3.

**Définition 5.3.** On appelle  $J_G$  l'idéal des sections triviales et  $G^* = \text{Spec } \mathcal{A}/J_G$  le sous-schéma des sections non-nulles de  $G$ . Une section  $s \in G(S)$  sera dite non-nulle si  $s \in G^*(S)$ .

On donne les propriétés élémentaires des sections non-nulles démontrées dans [KPI17](#).

**Proposition 5.4.** Soit  $G$  un schéma en groupes fini plat et de présentation finie sur  $S$ , on a :

- (a) Le fait d'être non-nulle est stable par changement de base. C'est-à-dire que pour toute  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $R$  on a canoniquement  $(G_R)^* \cong (G^*)_R$ .
- (b) Le fait d'être non-nulle est stable par isomorphisme. En d'autres termes, si  $\phi: G \xrightarrow{\sim} G'$  est un isomorphisme avec un schéma en groupe  $G'$ , alors pour tout  $g \in G'(R)$ ,  $g \in G'^*(R)$  si et seulement si  $\phi_R(g) \in G^*(R)$ .
- (c) Le fait d'être non-nulle est fpqc local. C'est-à-dire que pour tout  $\{\phi_i: U_i \rightarrow T\}_{i \in I}$ , recouvrement fpqc d'un schéma  $T$  sur  $S$  et tout  $g \in G(T)$  on a  $g \in G^*(T)$  si et seulement si  $G(\phi_i)(g) \in G^*(U_i)$  pour tout  $i \in I$ .
- (d) Si la base  $S$  est réduite, une section est non-nulle si et seulement si elle l'est fibre par fibre. c'est-à-dire que pour tout  $g \in G(S)$ ,  $g \in G^*(S)$  si et seulement si  $g \in G_s^*(k)$  pour tout point géométrique  $s: \text{Spec } k \rightarrow S$ .
- (e) Si  $G = G_1 \times_S G_2$  alors  $J_G = J_{G_1} \otimes J_{G_2}$ . Géométriquement,  $G^*$  est l'union de  $G_1 \times G_2^*$  et  $G_1^* \times G_2$ .
- (f) Si est  $G$  étale alors  $G = e(S) \coprod G^*$ , où  $e: S \rightarrow G$  est l'unité de  $G$ .

□

## 5.2. Sections pleines.

5.2.1. Soit  $S$  un schéma de base. Soit  $Z$  un schéma fini plat sur  $S$ . Soit  $n \geq 1$  tel que  $Z$  soit localement libre de rang  $n$  sur  $S$ . Soit  $\text{Spec}(R) \rightarrow S$  un schéma affine sur  $S$ . Soit  $B$  une  $R$ -algèbre telle que  $Z_R = \text{Spec}(B)$ . Alors  $f \in B = H^0(Z_R, \mathcal{O})$  définit par la multiplication  $\iota(f): B \rightarrow B$  un endomorphisme de  $R$ -modules. Comme  $B$  est localement libre sur  $R$  on peut définir le polynôme caractéristique

$$\chi_{\iota(f)}(T) = \det(T - f) \in R[T],$$

que nous noterons simplement  $\chi_f(T)$ .

**Définition 5.5.** Un ensemble  $P_1, \dots, P_n \in Z(S)$  est appelé *ensemble complet de sections* de  $Z$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) Pour toute  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $R$  et pour tout  $f \in H^0(Z_R, \mathcal{O})$  on a

$$\chi_f(T) = \prod_{i=1}^n (T - f(P_i)).$$

(ii) Pour toute  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $R$  et pour tout  $f \in B = H^0(Z_R, \mathcal{O})$  on a

$$N_{B/R}(f) = \prod_{i=1}^n f(P_i)$$

**Remarque 5.6.** La terminologie "ensemble complet de sections" n'est pas très adaptée puisque  $P_1, \dots, P_n$  peut contenir des répétitions. C'est une famille non-ordonnée.

5.2.2. Les deux propositions suivantes permettent de déterminer dans certains cas si un ensemble de sections est bien complet (cf. [KM85, 1.9.2] et [KM85, 1.10.2]).

**Proposition 5.7.** *Supposons que  $S$  soit réduit. Soit  $P_1, \dots, P_n \in Z(S)$  un ensemble de sections non nécessairement distinctes. Pour que  $P_1, \dots, P_n$  soit un ensemble complet de sections il faut et il suffit que pour tout point géométrique  $\bar{s} = \text{Spec}(L) \rightarrow S$ , les sections  $(P_1)_{\bar{s}}, \dots, (P_n)_{\bar{s}}$  soient telles que pour tout  $f \in B \otimes L = H^0(Z_{\bar{s}}, \mathcal{O})$  on ait l'égalité*

$$N_{B \otimes L/R}(f) = \prod_{i=1}^n f((P_i)_{\bar{s}}).$$

*En particulier  $P_1, \dots, P_n$  est un ensemble complet de sections si et seulement si pour tout point géométrique  $\bar{s} \rightarrow S$  les sections  $(P_1)_{\bar{s}}, \dots, (P_n)_{\bar{s}}$  forment un ensemble complet de sections de  $Z_{\bar{s}}$ .*

**Proposition 5.8.** *Soit  $R$  un anneau et  $F(x) \in R[x]$  un polynôme unitaire de degré  $n \geq 1$ . Supposons que  $S = \text{Spec } R$  et que*

$$Z = \text{Spec } R[x]/\langle F(x) \rangle.$$

*Supposons de plus que  $F$  se factorise sous la forme*

$$F(x) = \prod_{i=0}^n (x - a_i), \quad a_1, \dots, a_n \in R.$$

*Alors tout  $a_i$ , avec  $1 \leq i \leq n$ , définit une section  $P_i \in Z(R)$  et l'ensemble  $P_1, \dots, P_n$  est l'unique ensemble complet de sections de  $Z$ .*

5.2.3. On adapte ici légèrement les notions de  $A$ -générateurs dans [KM85] lorsque  $A$  est un anneau et  $G$  un  $A$ -module.

**Définition 5.9.** Soit  $A$  un anneau commutatif fini non trivial. Soit  $G$  un schéma en  $A$ -modules fini plat et de présentation finie de rang  $n \geq 1$  sur  $S$ . c'est-à-dire que  $G$  est un schéma en groupes fini sur  $S$  muni d'un morphisme d'anneaux

$$\iota: A \rightarrow \text{End}(G)$$

Soit  $B$  une  $A$ -algèbre finie non-triviale. On dit qu'un morphisme de  $A$ -modules  $\phi: B \rightarrow G(S)$  est un  $B/A$ -générateur si  $\{\phi(b)\}_{b \in B}$  est un ensemble complet de sections.

**Théorème 5.10.** *Soit  $A$  un anneau commutatif fini non trivial. Soit  $G$  un schéma en  $A$ -modules sur  $S$  et  $B$  une  $A$ -algèbre finie non triviale. Alors*

(1) *Le foncteur  $B/A$ -Gen( $G/S$ ) défini par*

$$T \mapsto \{\phi: B \rightarrow G(T) \mid \phi \text{ est un } B/A\text{-générateur de } G_T\}$$

*est représentable par un  $S$ -schéma de présentation finie, qui est un sous-schéma fermé de  $\text{Hom}_{A\text{-mod}}(\underline{B}, G) \subset G^K$ , où  $K$  est un ensemble de générateurs de  $B$  sur  $A$ .*

(2) *Si  $G$  est étale sur  $S$ , alors,*

$$B/A\text{-Gen}(G/S) \cong \underline{\text{Isom}}_{A\text{-mod}}(\underline{B}, G).$$

*Démonstration.* On commence par considérer  $B$  comme un groupe commutatif fini et  $G$  comme un schéma en groupes fini. Alors d'après [KM85, Prop. 1.10.13] le foncteur  $B\text{-Gen}(G/S)$  défini par

$$T \mapsto \{\phi: B \rightarrow G(T) \mid \phi \text{ est un } B\text{-générateur de } G_T\}$$

est représentable par un  $S$ -schéma de présentation finie, qui est un sous-schéma fermé du schéma  $\text{Hom}_{S\text{-gp}}(\underline{B}, G) \subset G^{\tilde{V}}$  où  $\tilde{V}$  est un ensemble de générateurs de  $B$  en tant que groupe abélien. Soit  $\text{Hom}_{\underline{A}\text{-mod}}(\underline{B}, G)$  défini pour tout  $S$ -schéma  $T$  par

$$\text{Hom}_{\underline{A}\text{-mod}}(\underline{B}, G)(T) = \{\phi \in \text{Hom}_{S\text{-gp}}(\underline{B}, G)(T) \mid \forall a \in A, \forall b \in \underline{B}(T), \phi(ab) = \iota(a) \cdot \phi(b)\}.$$

On le considère comme un sous-schéma de  $G^V$  où  $V \subset \tilde{V}$  est un ensemble de générateurs de  $B$  sur  $A$ . C'est un schéma de présentation finie car  $A$  est fini. Alors  $B/A\text{-Gen}(G/S)$  est représenté par l'intersection de  $B\text{-Gen}(G/S)$  avec  $\text{Hom}_{\underline{A}\text{-mod}}(\underline{B}, G)$ . De plus, si  $G$  est étale, (2) découle de [KM85, Prop. 1.10.13].  $\square$

## 6. SCHÉMAS DE RAYNAUD

Dans cette section on rappelle les définitions introduites dans [Ray74], la classification des schémas de Raynaud, leurs champs associés et on donne une notion de générateurs pour ces schémas en groupe. Soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ , et soit  $\mathbb{F}$  un corps fini contenant  $q = p^r$  éléments.

### 6.1. Définition et classification des schémas en groupes de Raynaud.

6.1.1. On rappelle ici la définition des schémas de Raynaud ([Ray74]).

Commençons par définir l'anneau de base  $D$ . Soit  $C \subset \bar{\mathbb{Q}}$  le sous-corps engendré sur  $\mathbb{Q}$  par  $\mu_{q-1}(\bar{\mathbb{Q}})$ , les racines  $(q-1)$ -ièmes de l'unité de  $\bar{\mathbb{Q}}$ . Soit  $D'$  l'anneau des entiers de  $C$ . Alors si  $\xi$  est une racine  $(q-1)$ -ième primitive de l'unité on a  $\mathbb{Z}[\xi] = D' \subset C = \mathbb{Q}(\xi)$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier fixé de  $D'$  au dessus de  $p$ . Soit  $D$  l'anneau obtenu à partir de  $D'$  en inversant  $(q-1)$  et les idéaux premiers au-dessus de  $p$  différents de  $\mathfrak{p}$ .

**Définition 6.1.** Un foncteur  $(\text{Sch}/S)^\circ \rightarrow (\text{Vect}/\mathbb{F})$  de la catégorie des schémas sur  $S$  vers la catégorie des  $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels sera appelé *schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels* s'il est représentable par un schéma fini, plat et de présentation finie. C'est donc un schéma en groupes commutatifs muni d'une action de  $\mathbb{F}$ .

Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels et  $\mathcal{A}$  la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre de Hopf associée. Alors  $\mathcal{A}$  est munie d'une action de  $\mathbb{F}$ . Notons :

- $d: \mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  la multiplication,
- $c: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_S \mathcal{A}$  la comultiplication,
- $[\lambda]: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}$  la co-action de  $\mathbb{F}$ ,
- $\mathcal{I}$  l'idéal d'augmentation de  $\mathcal{A}$ , qui est le noyau de la co-unité. Rappelons que  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{I}$ .

Par la co-associativité (resp. l'associativité) on peut définir la  $n$ -ième itération de  $d$  (resp.  $c$ ) comme étant une application  $d_n: \mathcal{A} \otimes_S \cdots \otimes_S \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  (resp.  $c_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_S \cdots \otimes_S \mathcal{A}$ ) où  $\mathcal{A}$  apparaît  $n$  fois.

Soit  $\mathbb{F}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{F}^\times, \mu_{q-1}(\bar{\mathbb{Q}}))$  le groupe multiplicatif des caractères de  $\mathbb{F}^\times$ . Un caractère de  $\mathbb{F}^\vee$  est dit *primitif* s'il est aussi additif (cf. remarque [2.10]). En d'autres termes, soit  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ , alors l'application  $\mathbb{F} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$  obtenue en imposant  $\chi(0) = 0$  est un homomorphisme de corps si et seulement si  $\chi$  est primitif. En particulier, tout caractère primitif est bijectif sur l'ensemble des racines de l'unité  $\mu_{q-1}(\bar{\mathbb{Q}})$ . Fixons un caractère primitif  $\chi_1$ , alors  $\chi_1^p$  est aussi primitif. Les caractères  $\chi_i = \chi_1^{p^{i-1}}$ , pour  $1 \leq i \leq r$  sont distincts, et on obtient ainsi tous les caractères primitifs. De plus, tout caractère admet un développement  $p$ -adique en termes de caractères primitifs, ce qui signifie que tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  s'écrit (de manière non unique)  $\chi = \prod_i \chi_i^{a_i}$  pour  $0 \leq a_i \leq p-1$ . Le caractère trivial  $\chi_0$  d'image le singleton  $\{1\}$  s'écrit  $\chi_0 = \prod_i \chi_i^{p-1}$ .

Pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ , on considère l'endomorphisme de  $\mathcal{A}$ , donné par

$$\iota_\chi = \frac{1}{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}^\times} \chi^{-1}(\lambda)[\lambda].$$

On vérifie que c'est une famille de  $q - 1$  idempotents orthogonaux. Ceci nous donne la décomposition

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \mathcal{I}_\chi \text{ pour } \mathcal{I}_\chi = \iota_\chi(\mathcal{I}).$$

On notera simplement  $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_{\chi_i}$  pour  $0 \leq i \leq r$ . Pour  $\chi$  et  $\chi'$  des caractères fondamentaux, on peut restreindre la co-multiplication aux sommants de  $\mathcal{I}$  et obtenir  $c_{\chi, \chi'}: \mathcal{I}_{\chi\chi'} \rightarrow \mathcal{I}_\chi \otimes_S \mathcal{I}_{\chi'}$ . De même pour la multiplication on obtient  $d_{\chi, \chi'}: \mathcal{I}_\chi \otimes_S \mathcal{I}_{\chi'} \rightarrow \mathcal{I}_{\chi\chi'}$ . Comme précédemment, l'associativité et la co-associativité nous permettent de définir leurs itérations pour  $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathbb{F}^\vee$  quelconques et on les notera

$$c_{\chi_1, \dots, \chi_n}: \mathcal{I}_{\chi_1 \dots \chi_n} \rightarrow \mathcal{I}_{\chi_1} \otimes_S \dots \otimes_S \mathcal{I}_{\chi_n}, \quad d_{\chi_1, \dots, \chi_n}: \mathcal{I}_{\chi_1} \otimes_S \dots \otimes_S \mathcal{I}_{\chi_n} \rightarrow \mathcal{I}_{\chi_1, \dots, \chi_n}.$$

**Définition 6.2.** Soit  $G$  un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $S$ . On dit que  $G$  est un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud si pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  le  $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathcal{I}_\chi$  est inversible. On dira de plus que  $G$  est un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud libre si pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  le  $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathcal{I}_\chi$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module libre. S'il n'y a pas de confusion possible, nous dirons simplement que  $G$  est un schéma de Raynaud.

Il en résulte en particulier que  $G$  est de rang  $q$ . En particulier les  $\mathbb{F}_p$ -schémas de Raynaud sont les schémas en groupes de Oort-Tate étudiés dans [TO70]. Une des différences dans ce cas est qu'un schéma en  $\mathbb{F}_p$ -vectoriel d'ordre  $p$  est toujours un  $\mathbb{F}_p$ -schéma de Raynaud.

6.1.2. On introduit quelques notations supplémentaires pour énoncer le théorème de classification. Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud sur  $S$ . Alors on considère

- le morphisme  $c_i = c_{\chi_i, \dots, \chi_i}$  où le  $i$ -ème caractère primitif  $\chi_i$  est considéré  $p$  fois. Cette application peut être considérée canoniquement comme  $c_i: \mathcal{I}_{i+1} \rightarrow \mathcal{I}_i^p$  puisque  $\chi_i^p = \chi_{i+1}$ ,
- le morphisme  $d_i = d_{\chi_i, \dots, \chi_i}$  où le  $i$ -ème caractère primitif  $\chi_i$  est considéré  $p$  fois. De même on peut considérer cette application comme  $d_i: \mathcal{I}_i^p \rightarrow \mathcal{I}_{i+1}$ ,
- la composée  $w_i = c_i \circ d_i$  est un élément de  $\text{End}(\mathcal{I}_{i+1})$  et par la définition d'un schéma de Raynaud on peut considérer  $w_i$  comme un élément de  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ .

M. Raynaud a établi le lemme suivant (cf. [Ray74, Prop.1.3.1]).

**Lemme 6.3.** *Il existe  $w \in pD^\times$  tel que pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq r$ ,  $w_i$  soit l'image de  $w$  par  $D \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ . En particulier,  $w$  est indépendant de  $i$  et de  $S$ .*

□

Dans la suite, on notera aussi  $w$  l'image dans  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ .

De même que précédemment, toujours avec  $\chi = \prod_j \chi_j^{a_j}$ , on peut définir

- le morphisme  $c_\chi = c_{\chi_1, \dots, \chi_r}: \mathcal{I}_\chi \rightarrow \mathcal{I}_{\chi_1}^{\otimes a_1} \otimes_S \dots \otimes_S \mathcal{I}_{\chi_r}^{\otimes a_r}$ ,
- le morphisme  $d_\chi = d_{\chi_1, \dots, \chi_r}: \mathcal{I}_{\chi_1}^{\otimes a_1} \otimes_S \dots \otimes_S \mathcal{I}_{\chi_r}^{\otimes a_r} \rightarrow \mathcal{I}_\chi$ ,
- la composée  $w_\chi = c_\chi \circ d_\chi$  qui est un élément de  $\text{End}(\mathcal{I}_\chi)$ . On peut considérer  $w_\chi$  comme un élément de  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ .

M. Raynaud a également établi le lemme suivant (cf. [Ray74, Prop 1.3.1]) :

**Lemme 6.4.** *Soit  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ . Alors  $w_\chi$  est dans l'image de  $D^\times \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ , en particulier il est inversible.*

□

6.1.3. On énonce maintenant le théorème principal de cette section, établi par M. Raynaud en [Ray74, Prop.1.4.1].

**Théorème 6.5** (Classification des schémas de Raynaud). *Fixons  $w \in pD^\times$ . L'application définit sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $\mathbb{F}$ -schémas de Raynaud*

$$G \longmapsto (\mathcal{I}_{\chi_i}, c_i, d_i)_{1 \leq i \leq r}$$

*est une bijection à valeurs dans l'ensemble des triplets  $(\mathcal{I}_{\chi_i}, c_i, d_i)_{1 \leq i \leq r}$ , constitués de*

- un système  $(\mathcal{I}_i)_{1 \leq i \leq r}$  de classes d'isomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -modules inversibles,

- deux systèmes de morphismes

$$\begin{cases} (c_i: \mathcal{S}_{i+1} \rightarrow \mathcal{S}_i^p)_{1 \leq i \leq r} \\ (d_i: \mathcal{S}_i^p \rightarrow \mathcal{S}_{i+1})_{1 \leq i \leq r} \end{cases}$$

vérifiant pour tout  $i$ , tel que  $1 \leq i \leq r$ , la relation  $d_i \circ c_i = w \cdot \text{id}_{\mathcal{S}_{i+1}}$  dans  $\text{End}(\mathcal{S}_{i+1})$ .

□

On retrouve pour  $r = 1$  la classification des schémas en groupes d'ordre premier  $p$  établie dans [TO70].

En particulier, on obtient la description suivante des schémas de Raynaud libres, qui s'applique par exemple si  $S$  est le spectre d'un anneau local.

**Corollaire 6.6.** Fixons  $w \in pD^\times$ . Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud libre sur  $S$ . Alors  $G$  est entièrement déterminé à isomorphisme près par la donnée de  $r$  couples  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$  d'éléments de  $\Gamma(S, \mathcal{O})$  tels que  $x_i y_i = w$  pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq r$ . De plus,  $G$  est isomorphe à

$$\text{Spec} \frac{\mathcal{O}_S[z_1, \dots, z_r]}{\langle z_i^p - x_i z_{i+1} \rangle_{i=1, \dots, r}}, \quad (6.1)$$

où l'indice est considéré modulo  $r$ . La co-multiplication est donnée par

$$c(z_i) = z_i \otimes 1 + 1 \otimes z_i + \sum_{\chi \chi' = \chi_i} \frac{x_i^{-h} \cdots x_{i-1}}{w_\chi w_{\chi'}} \left( \prod_j z_j^{a_j} \right) \otimes \left( \prod_j z_j^{a'_j} \right),$$

pour  $\chi = \prod_j \chi_j^{a_j}$ ,  $\chi' = \prod_j \chi_j^{a'_j}$  et  $h$  un entier dépendant de  $\chi$  et  $\chi'$ . Le dual de Cartier  $G^D$  est obtenu en échangeant les rôles de  $x_i$  et  $y_i$ . On dira que  $G$  est le  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud de paramètres  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$ .

De plus, les familles de couples  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$  et  $(x'_i, y'_i)_{1 \leq i \leq r}$ , tels que  $x_i y_i = x'_i y'_i = w$  pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq r$ , définissent des  $S$ -schémas en  $\mathbb{F}$ -vectoriels isomorphes si et seulement s'il existe une famille d'unités  $\lambda_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$  telles que

$$x'_i = \lambda_i^p x_i \lambda_{i+1}^{-1} \text{ et } y'_i = \lambda_i^{-p} y_i \lambda_{i+1} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq r.$$

□

**Définition 6.7.** Si  $G$  est  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud libre sur  $S$  de la forme (6.1) on dira que  $G$  est le  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud de paramètres  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$ .

6.1.4. On traduit le théorème précédent dans le langage des champs algébriques. On munit  $(\text{Sch}/D)$  de la topologie fpqc.

**Définition 6.8.** On note  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$  la catégorie fibrée en groupoïdes des  $\mathbb{F}$ -schémas de Raynaud sur  $(\text{Sch}/D)$ .

Il est clair que cette 2-catégorie est fibrée en groupoïde. Par la descente des fibrés et des morphismes entre les fibrés elle satisfait aux axiomes de descente. C'est donc un champ. Le théorème (6.5) et son corollaire nous permettent d'en expliciter une structure de champs quotient.

**Théorème 6.9.** Soit  $w \in pD^\times$  fixé.

(a)  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$  est un champs algébrique.

(b) À un choix de caractère  $\chi_1 \in \mathbb{F}^+$  près  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$  est canoniquement isomorphe à

$$\left[ \text{Spec} \frac{D[x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r]}{\langle x_i y_i - w \rangle_{i=1, \dots, r}} / \mathbb{G}_m^r \right],$$

où, pour  $B$  une  $D$ -algèbre,  $\mathbb{G}_m^r(B)$  agit pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{G}_m^r(B)$  sur  $x_i$  avec  $1 \leq i \leq r$  par  $\lambda \cdot x_i = \lambda_i^p x_i \lambda_{i+1}^{-1}$ , et sur  $y_i$  par  $\lambda \cdot y_i = \lambda_i^{-p} y_i \lambda_{i+1}$ .

(c) Le schéma en groupes universel sur  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$  est donné par

$$\mathcal{G} = \left[ \text{Spec} \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}}[z_1, \dots, z_r]}{\langle z_i^p - x_i z_{i+1} \rangle_{i=1, \dots, r}} / \mathbb{G}_m^r \right],$$

où pour  $B$  une  $D$ -algèbre,  $\mathbb{G}_m^r(B)$  agit pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{G}_m^r(B)$  sur  $z_i$  avec  $1 \leq i \leq r$  par  $\lambda \cdot z_i = \lambda_i z_i$ .

□

## 6.2. Générateur des schémas de Raynaud.

6.2.1. On définit maintenant la notion de générateur pour les schémas de Raynaud.

**Définition 6.10.** On notera  $\mathcal{G}^\times$  le  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$ -sous-schéma fermé de  $\mathcal{G}$  défini par l'idéal

$$\mathcal{J} = \langle (z_1 \cdots z_r)^{p-1} - x_1 \cdots x_r \rangle.$$

Nous appelons  $\mathcal{G}^\times$  le *sous-schéma universel des générateurs*. Pour  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud sur  $S$  donné par  $\phi: S \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$ , on notera  $G^\times = \phi^*(\mathcal{G}^\times)$  le *sous-schéma des générateurs de  $G$* . De plus, on dira qu'une section  $s \in G(S)$  est une *section génératrice* si  $s \in G^\times(S)$ .

On énonce un lemme calculatoire qui permet de réduire les équations du schéma de Raynaud et de ces générateurs dans des cas que nous rencontrerons dans la suite.

**Lemme 6.11.** *Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud libre sur  $S$  de paramètres  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$ , c'est-à-dire que*

$$G = \text{Spec} \frac{\mathcal{O}_S[z_1, \dots, z_r]}{\langle z_i^p - x_i z_{i+1} \rangle_{i=1, \dots, r}},$$

avec  $x_i, y_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

a) *Soit  $j$  un indice fixé tel que  $1 \leq j \leq r$  et supposons que  $x_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$  pour tout  $i \neq j$ . Alors*

$$G \cong \text{Spec} \frac{\mathcal{O}_S[z]}{\langle z^q - \Delta_j z \rangle} \text{ et } G^\times \cong \text{Spec} \frac{\mathcal{O}_S[z]}{\langle z^{q-1} - \Delta_j \rangle},$$

avec  $\Delta_j = \prod_{i=1}^r x_{j+i}^{p^{i-1}}$ , où l'indice  $i$  est considéré modulo  $r$ .

d) *Supposons qu'il existe un indice  $j$  avec  $1 \leq j \leq r$  tel que  $x_j$  soit nilpotent. Alors  $G$  et  $G^\times$  sont infinitésimaux.*

□

Ce lemme montre en particulier que notre notion de générateur étend celle introduite pour les schémas en groupes de Oort-Tate dans [\[HR12\]](#).

6.2.2. Montrons maintenant qu'une section est génératrice si et seulement si elle est non-nulle au sens de la définition [5.3](#).

Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud libre sur  $S$  de paramètres  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$  avec  $x_i, y_i \in \Gamma(S, \mathcal{O})$  pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r$ . On note toujours  $\mathcal{J}$  l'idéal d'augmentation de  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 6.12.** *On a  $J_G = \langle (z_1 \cdots z_r)^{p-1} - x_1 \cdots x_r \rangle$ , donc une section dans  $G(S)$  est non-nulle si et seulement si elle est génératrice. En d'autres termes  $G^* = G^\times$ .*

*Démonstration.* On note tout d'abord que l'idéal  $\langle (z_1 \cdots z_r)^{p-1} - x_1 \cdots x_r \rangle$  est bien contenu dans  $J_G$ . En effet, sur les générateurs  $z_i$  de  $\mathcal{J}$  on a

$$\begin{aligned} z_i \cdot ((z_1 \cdots z_r)^{p-1} - x_1 \cdots x_r) &= z_1^{p-1} \cdots \hat{z}_i x_i z_{i+1}^p z_{i+2}^{p-1} \cdots z_r^{p-1} - z_i \cdot x_1 \cdots x_r \\ &= x_i z_1^{p-1} \cdots \hat{z}_i \hat{z}_{i+1} x_{i+1} z_{i+2}^p z_{i+3}^{p-1} \cdots z_r^{p-1} - z_i \cdot x_1 \cdots x_r \\ &\vdots \\ &= x_1 \cdots \hat{x}_{i-1} \cdots x_r z_{i-1}^p - z_i \cdot x_1 \cdots x_r \\ &= z_i(x_1 \cdots x_r - x_1 \cdots x_r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, rappelons que  $\mathcal{A}$  est libre de base les monômes  $z_1^{i_1} \cdots z_r^{i_r}$ , avec  $i_1, \dots, i_r \leq p-1$ . On va calculer le noyau des endomorphismes induits par la multiplication par les  $z_i$ . Soit  $\chi = \prod_j \chi_i^{a_i} \in \mathbb{F}^\vee$ , alors  $\iota(z_i): \mathcal{J}_\chi \rightarrow \mathcal{J}_{\chi \chi_i}$  est un isomorphisme si  $a_i < p-1$ . Ceci valant pour tous les  $z_i$  avec  $1 \leq i \leq r$ , pour  $f \in J_G$  tous les coefficients devant les monômes  $z_1^{i_1} \cdots z_r^{i_r}$  avec  $(i_1, \dots, i_r) \neq (p-1, \dots, p-1)$  et  $(i_1, \dots, i_r) \neq (0, \dots, 0)$  sont nuls. Donc il existe  $a, b \in \Gamma(S, \mathcal{O})$  tel que  $f = a + b(z_1 \cdots z_r)^{p-1}$ . Mais en faisant agir  $z_1$  sur  $f$ , on obtient

$$0 = z_1 f = a z_1 + b x_1 \cdots x_r z_1,$$



et donc  $a = -bx_1 \cdots x_r$ . Ainsi  $f = b(-x_1 \cdots x_r + (z_1 \cdots z_r)^{p-1})$ , en particulier

$$f \in \langle (z_1 \cdots z_r)^{p-1} - x_1 \cdots x_r \rangle,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

Avec la proposition précédente, cette proposition montre en particulier que la notion de générateur est locale et que notre définition à partir du champs de Raynaud est adaptée. On a donc le corollaire suivant :

**Corollaire 6.13.** *Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud sur  $S$ . Une section  $s \in G(S)$  est non-nulle si et seulement si elle est génératrice.*

6.2.3. Montrons maintenant qu'une section est génératrice si et seulement si elle définit un ensemble de section pleines.

**Définition 6.14.** Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud sur  $S$ . Alors on dit que  $s \in G(S)$  est une *section pleine* si  $(\lambda \cdot s)_{\lambda \in \mathbb{F}}$  est un ensemble complet de sections, c'est-à-dire si le morphisme  $\mathbb{F}$ -linéaire  $\phi: \mathbb{F} \rightarrow G(S)$  défini par  $\phi(1) = s$  est un  $\mathbb{F}/\mathbb{F}$ -générateur au sens de la définition 5.9

On a un corollaire immédiat de la proposition 5.10 que l'on énonce dans ce cas particulier.

**Corollaire 6.15.** *Le foncteur défini par*

$$T \longmapsto \{s \in G(T) \mid s \text{ est une section pleine de } G_T\}$$

*est représentable par un sous-schéma  $G^\bullet$  de  $G$ . En particulier  $G^\bullet$  est tel que toute section  $s \in G(S)$  est pleine si et seulement si  $s \in G^\bullet(S)$ .*

*De plus si  $G$  est étale, on a*

$$G^\bullet \cong \underline{\text{Isom}}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}(\mathbb{F}, G),$$

*où les isomorphismes considérés sont des isomorphismes de  $\mathbb{F}$ -schémas de Raynaud sur  $S$ .*

La proposition suivante avait déjà été observée par G. Pappas (cf. [Pap95, Prop.5.1.5]). On propose une autre démonstration utilisant le champ de Raynaud.

**Proposition 6.16.** *Soit  $G$  un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud sur  $S$ . Alors  $a \in G(S)$  est une section pleine si et seulement si  $a \in G^\times(S)$ . En d'autres termes, on a  $G^\times = G^\bullet$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\mathcal{G}^\times = \mathcal{G}^\bullet \subset \mathcal{G}$  comme schémas sur  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$ . D'après le point (e) de la proposition 5.4 et la proposition 5.7 et comme  $\mathcal{M}_{\mathbb{F}\text{-Ray}}$  est réduit, il suffit de montrer que pour tout  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud  $G$  sur un corps  $L$ , on a  $G^\times = G^\bullet$ .

Sur le corps  $L$ , le groupe  $G$  est affine. Pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq r$  soit  $x_i, y_i \in L$  tel que  $G$  soit de paramètres  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq r}$ . Soit  $s \in G(L)$  une section. Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r$  notons  $s_i = s^*(z_i) \in L$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{F}$ , l'action de  $\mathbb{F}$  sur les sections donne  $[\lambda] \cdot s_i = \chi_i(\lambda)s_i$  où  $\chi_i$  est le  $i$ -ème caractère primitif défini en 6.1. Notons  $\mathcal{A} = H^0(G, \mathcal{O})$ . On distingue maintenant deux cas :

Supposons tout d'abord que les  $x_i \in L$  soient tous non-nuls, et donc inversibles, pour  $1 \leq i \leq r$ . Dans ce cas le point a) du lemme 6.11 pour  $j = 1$  nous donne les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} G^\times & \xrightarrow{\quad} & G \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Spec } \frac{\mathcal{O}_S[z]}{\langle z^{q-1} - \Delta_1 \rangle} & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } \frac{\mathcal{O}_S[z]}{\langle z^q - \Delta_1 z \rangle} \end{array} \quad (6.2)$$

avec  $\Delta_1 = \prod_{i=1}^r x_{i+1}^{p^{i-1}}$ . Choisissons un générateur  $\lambda_0 \in \mathbb{F}^\times$ . Alors comme  $\chi_1$  est primitif  $\xi = \chi_1(\lambda_0)$  est une racine primitive  $(q-1)$ -ième de l'unité. De plus, par les isomorphismes de (6.2) la section  $s$  est définie par  $s_1$  et  $\lambda = \lambda_0^k \in \mathbb{F}$  pour  $k$  entier agit par  $[\lambda] \cdot s_1 = \xi^k s_1$ . D'après la proposition 5.8 la section  $s$  est pleine si et seulement si

$$z^q - \Delta_1 z = z \prod_{i=1}^q (z - \xi^i s_1).$$

Donc  $s$  est une section pleine si et seulement si  $s_1^{q-1} = \Delta_1$ , ce qui termine ce cas.



Supposons maintenant que l'un au moins des  $x_i \in K$  pour  $1 \leq i \leq r$  soit nul. D'après le lemme [6.11](#)  $G$  est infinitésimal. Tout  $f \in \mathcal{S}$  induit un endomorphisme  $\iota(f): B \rightarrow B$  nilpotent. Ainsi soit  $f \in G$ , notons  $f = f_0 + f_1$  sa décomposition dans  $B = L \oplus \mathcal{S}$ . Alors  $N_{B/L}(f) = f_0^q$ . Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r$ , soit  $z_i \in \Gamma(L, \mathcal{S}_{\chi_i})$  un générateur. Posons

$$P_f(z_1, \dots, z_r) = \prod_{\lambda \in F} f(\chi_1(\lambda)z_1, \dots, \chi_r(\lambda)z_r) \in B.$$

On a explicitement

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}^\times, \quad [\lambda] \cdot P_f(z_1, \dots, z_r) = P_f(\chi_1(\lambda)z_1, \dots, \chi_r(\lambda)z_r).$$

Il est clair que  $P_f$  est invariant sous l'action de  $\mathbb{F}^\times$ . On peut supposer que  $P_f = \sum_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} a_\chi z^\chi$  où pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ , de développement  $p$ -adique  $\chi = \prod_i \chi_i^{a_i}$ , on a  $z^\chi = z_1^{a_1} \cdots z_r^{a_r}$  un générateur de  $\Gamma(L, \mathcal{S}_\chi)$ . L'invariance et le fait que les  $(z^\chi)_{\chi \in \mathbb{F}^\vee}$  soient libres nous donnent que

$$\forall \chi \in \mathbb{F}^\vee \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{F}^\times, \quad a_\chi z^\chi = a_\chi \chi(\lambda) z^\chi.$$

Donc on a  $P_f(z_1, \dots, z_r) = f_0^q + a_f (z_1 \cdots z_r)^{p-1}$  pour  $a_f \in L$ . Soit  $s \in G(L)$ , en vue de la proposition [5.7](#) il suffit de montrer que  $s$  est génératrice si et seulement si  $N_{B/L}(f) = P_f(s_1, \dots, s_r)$ , que l'on a explicité comme :

$$f_0^q = f_0^q + a_f (s_1 \cdots s_r)^{p-1}.$$

Supposons que  $s$  est une section génératrice. Alors  $(s_1 \cdots s_r)^{p-1} = x_1 \cdots x_r = 0$ , et donc  $s$  est une section pleine. Réciproquement supposons que  $s$  est une section pleine. Il suffit de trouver  $f \in B$  tel que  $a_f \neq 0$  dans  $L$ . On pose

$$f = 1 + (z_1 \cdots z_r)^{p-1}$$

Alors  $a_f = q - 1$ , et donc

$$(s_1 \cdots s_r)^{p-1} = 0 = x_1 \cdots x_r.$$

Ainsi  $G^\bullet = G^\times$ , ce qui termine ce cas et achève la preuve.  $\square$

## 7. PRÉLIMINAIRES DE GÉOMÉTRIE FORMELLE ET RIGIDE

Dans cette section on fait quelques rappels de géométrie formelle et rigide. On utilisera le point de vue de Raynaud sur la catégorie des espaces rigides cohérents et on étendra sa construction pour définir les espaces rigides quasi-séparés. On ne sera pas très rigoureux sur les univers et les problèmes de théorie des ensembles. Sauf mention du contraire on supposera que tout recouvrement est indexé sur une famille *petite* et toute limite inductive par une famille *essentiellement petite*. On commence par quelques rappels d'algèbre topologique.

### 7.1. Rappels d'algèbre topologique.

#### 7.1.1.

**Définition 7.1.** Soit  $A$  un anneau topologique. On dit que  $A$  est *pré-admissible* s'il existe un idéal ouvert  $I \subset A$ , appelé *idéal de définition*, tel que pour tout ouvert  $V \subset A$  il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $I^n \subset V$ . On dit que la suite  $\{I^n\}$  *tend vers 0*. Si, de plus,  $A$  est séparé et complet on dira que  $A$  est *admissible*.

Si  $A$  est pré-admissible et s'il existe un idéal de définition  $I$  tel que  $\{I^n\}_{n \geq 0}$  est une base de voisinages fondamentale de  $0 \in A$  on dira que  $A$  est *pré-adique*. Si  $A$  est un anneau admissible pré-adique tel qu'il existe un idéal de définition de type fini, on dira qu'il est *adique*.

Soit  $A$  est un anneau pré-adique et  $B$  un anneau. Soit  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme qui fait de  $B$  une  $A$ -algèbre linéairement topologisée, on dit alors que  $\varphi$  est un *morphisme pré-adique*. Si, de plus,  $A$  est adique et  $B$  est séparé et complet on dit que  $\varphi$  est un *morphisme adique*.

**Remarque 7.2.** Pour les anneaux adiques, on ajoute l'hypothèse que l'idéal de définition est de type fini. Ainsi on suit la terminologie de [\[Abb10\]](#) contrairement à [\[GD71\]](#) pour avoir une notion stable par localisation et complétion.

Soit  $A$  un anneau pré-admissible. Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental de voisinages de  $0 \in A$ , formé d'idéaux de définition. Alors on pose

$$\widehat{A} = \varprojlim_{\lambda \in J} A/I_\lambda,$$

le *complété* de  $A$ . On a un morphisme canonique  $A \rightarrow \widehat{A}$ , dit *morphisme de complétion*. C'est un isomorphisme si  $A$  est admissible. Cette définition ne dépend pas du système fondamental de voisinages choisi. De plus, on a la propriété universelle suivante :

**Proposition 7.3.** *Soit  $A$  un anneau pré-admissible. Pour tout anneau admissible  $B$  on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(\widehat{A}, B) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(A, B),$$

*donnée par le morphisme de complétion. Cette bijection est naturelle en  $B$ .*

7.1.2. On définit ici des conditions de finitude pour les algèbres topologiques.

Soit  $A$  un anneau admissible,  $n \geq 1$  un entier. On considère l'anneau des séries formelles  $A[[X_1, \dots, X_n]]$ . On dit qu'une série formelle  $f \in A[[X_1, \dots, X_n]]$  de la forme

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$$

est *restreinte* si, pour tout voisinage ouvert  $V \subset A$  de  $0 \in A$ , il existe un nombre fini de familles  $\nu \in \mathbb{N}^n$  tel que  $a_\nu \notin V$ . Les séries formelles restreintes forment une sous-algèbre de  $A[[X_1, \dots, X_n]]$ , l'*algèbre des séries formelles restreintes sur  $A$* , que l'on note  $A\{X_1, \dots, X_n\}$  (cf. [Bou89] Chap. III, §4.2). On peut présenter cet anneau comme une limite projective d'anneaux polynomiaux. Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental de voisinages de  $0$ , formé d'idéaux de définition. Alors on a naturellement un système projectif  $(A/I_\lambda, u_\lambda)_{\lambda \in J}$  dont la limite projective est  $A$ . On a (cf. [Bou89] Chap. III, §4.2, prop. 3) :

$$A\{X_1, \dots, X_n\} = \varprojlim_{\lambda \in J} (A/I_\lambda)[X_1, \dots, X_n].$$

Comme le complété  $I$ -adique d'un anneau noethérien est noethérien (cf. [AM16] 10.26) on a la proposition suivante :

**Proposition 7.4.** *Soit  $A$  un anneau adique et  $n \geq 0$  un entier. Si  $A$  est un anneau noethérien alors il en est de même pour  $A\{X_1, \dots, X_n\}$ .*

**Définition 7.5.** Soit  $A$  un anneau admissible,  $B$  une  $A$ -algèbre linéairement topologisée. On dit que  $B$  est *topologiquement de type fini* sur  $A$  s'il existe un entier  $n \geq 0$  et une surjection continue et stricte

$$A\{X_1, \dots, X_n\} \twoheadrightarrow B.$$

Si, de plus, le noyau de cette surjection est topologiquement de type fini sur  $A$  alors on dit que  $B$  est *topologiquement de présentation finie* sur  $A$ .

Soit  $R$  un anneau de valuation muni de la topologie pour laquelle les idéaux non-nuls forment une base de voisinages de  $0 \in R$ . On dira que  $R$  est un *anneau 1-valuationnaire* s'il est de hauteur 1, séparé et complet (cf. [Abb10] 1.9.9). Supposons que  $A$  est une algèbre adique linéairement topologisée sur un anneau 1-valuationnaire  $R$ . Si  $A$  noethérienne ou topologiquement de type fini sur  $R$ , on dira qu'elle est *idyllique*. Cette définition est introduite dans [Abb10] 1.10].

On introduit de plus la notion suivante :

**Définition 7.6.** Soit  $A$  un anneau admissible et  $B$  une  $A$ -algèbre linéairement topologisée. On dira que  $B$  est *formellement de type fini* sur  $A$  s'il existe des entiers  $n, m \geq 0$  et une surjection continue stricte

$$A\{X_1, \dots, X_n\}[[Y_1, \dots, Y_m]] \twoheadrightarrow B.$$

Si, de plus, le noyau de cette surjection est formellement de type fini sur  $A$ , on dira que  $B$  est *formellement de présentation finie* sur  $A$ .

7.1.3. Soit  $A$  un anneau pré-admissible. Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental de voisinages de  $0 \in A$ , formé d'idéaux de définition. Soit  $S \subset A$  une partie multiplicative. Pour tout  $\lambda \in J$  on obtient une partie multiplicative  $S_\lambda \subset A/I_\lambda$ . Pour tout  $\lambda, \mu \in J$  tel que  $I_\lambda \subset I_\mu$ , l'application de réduction  $u_{\lambda, \mu}: A/I_\lambda \rightarrow A/I_\mu$  induit une application entre les localisés  $v_{\lambda, \mu}: S_\lambda^{-1}(A/I_\lambda) \rightarrow S_\mu^{-1}(A/I_\mu)$ . Ainsi, on obtient un système projectif  $(S_\lambda^{-1}(A/I_\lambda), v_{\lambda, \mu})_{\lambda, \mu \in J}$ . On pose

$$A\{S^{-1}\} = \varprojlim_{\lambda \in J} S_\lambda^{-1}(A/I_\lambda),$$

l'anneau complet des fractions de  $A$  à dénominateur dans  $S$ . L'idéal  $\varprojlim_{\lambda \in J} S_\lambda^{-1}(I/I_\lambda)$  est un idéal de définition de  $A\{S^{-1}\}$ . L'anneau  $A\{S^{-1}\}$  est topologiquement isomorphe au séparé complété de  $S^{-1}A$  pour la topologie dont un système de voisinages de  $0 \in A$  est  $(S^{-1}I_\lambda)_{\lambda \in J}$  (cf. [GD71, 0.7.6.2]).

**Proposition 7.7.** *Soit  $A$  un anneau admissible (resp. adique),  $S \subset A$  une partie multiplicative. Alors  $A\{S^{-1}\}$  est un anneau admissible (resp. adique) et pour  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental de voisinages de  $0$ , formé d'idéaux de définition de  $A$ ,  $(S^{-1}I_\lambda)_{\lambda \in J}$  est un système fondamental de voisinages de  $0$ , formé d'idéaux de définition de  $A\{S^{-1}\}$ .*

On renvoie à [GD71, 0.7.6.11] pour l'énoncé dans le cas où  $A$  est admissible et à [Abb10, 1.8.11] pour l'énoncé dans le cas où  $A$  est adique.

Soit  $A$  un anneau admissible,  $I \subset A$  un idéal de définition et  $f \in A$ . Alors  $S_f = (f^n)_{n \geq 0}$  est une partie multiplicative de  $A$  et on notera  $A_{\{f\}}$  pour  $A\{S_f^{-1}\}$  et  $I_{\{f\}}$  son idéal de définition.

**Remarque 7.8.** On prendra garde qu'au fait que, en général, contrairement au cas classique, pour  $A$  un anneau admissible et  $S = A - \mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{p} \subset A$  un idéal premier, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{f \in S} A_{\{f\}} \rightarrow A\{S^{-1}\},$$

n'est pas un isomorphisme. Cependant, pour  $A$  adique et idyllique ce morphisme est fidèlement plat (cf. [Abb10, 1.12.7]).

## 7.2. Schémas formels.

7.2.1. Soit  $A$  un anneau admissible et  $I$  un idéal de définition. Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental de voisinages de  $0 \in A$ , formé d'idéaux de définition. Pour tout  $\lambda \in J$  on pose  $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A/I_\lambda)}$ . Pour tout  $\lambda \in J$ ,  $\text{Spec}(A/I_\lambda)$  a le même espace topologique sous-jacent que  $\text{Spec}(A/I)$ . Ainsi  $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in J}$  est une famille de faisceaux d'anneaux sur  $\text{Spec}(A/I)$ . Soit  $\lambda, \mu \in J$  tel que  $I_\lambda \subset I_\mu$ . Le morphisme de réduction induit un morphisme de faisceaux d'anneaux  $u_{\lambda, \mu}: \mathcal{O}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_\mu$ . On obtient un système projectif de faisceaux d'anneaux  $(\mathcal{O}_\lambda, u_{\lambda, \mu})_{\lambda, \mu \in J}$ .

On définit le *spectre formel* de  $A$ ,  $\text{Spf}(A)$  comme un espace annelé : l'espace topologique sous-jacent est  $\text{Spec}(A/I)$ , l'ensemble des idéaux ouverts de  $A$ , muni de la topologie de Zariski. Le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\text{Spf}(A)}$  est défini par

$$\mathcal{O}_{\text{Spf}(A)} = \varprojlim_{\lambda} \mathcal{O}_\lambda.$$

Un espace annelé de la forme  $\text{Spf}(A)$  pour  $A$  un anneau admissible est appelé *schéma formel affine*.

Pour  $f \in A$  on définit le sous-ensemble ouvert  $\mathcal{D}(f) \subset \text{Spf}(A)$  par

$$\mathcal{D}(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spf}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

La famille  $(\mathcal{D}(f))_{f \in A}$  est une base pour la topologie de Zariski de  $\text{Spf}(A)$ . On a la proposition suivante (cf. [GD71, 10.1.4]) :

**Proposition 7.9.** *L'espace annelé  $(\mathcal{D}(f), \mathcal{O}_{\text{Spf}(A)}|_{\mathcal{D}(f)})$  est un schéma formel isomorphe à  $\text{Spf}(A_{\{f\}})$ .*

On veut "faisceautiser" les idéaux de définition et les systèmes fondamentaux de voisinages de  $0$  formés d'idéaux. Soit  $A$  un anneau admissible,  $I \subset A$  un idéal de définition fixé et  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental de voisinages de  $0$ , formé d'idéaux de définition contenus dans  $I$ . Alors

pour tout  $\lambda \in J$ ,  $I/I_\lambda$  définit un faisceau d'idéaux sur  $\text{Spec}(A/I_\lambda)$  et donc sur  $\text{Spf}(A)$ . Comme précédemment, les morphismes de réduction définissent un système projectif. La limite de ce système projectif, notée  $I^\Delta$ , est un faisceau d'idéaux sur  $\text{Spf}(A)$ . On note alors que pour tout  $f \in A$ ,

$$I^\Delta|_{\mathcal{D}(f)} = (I_{\{f\}})^\Delta.$$

**Définition 7.10.** Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel affine et  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un faisceau d'idéaux. On dit que  $\mathcal{I}$  est un *idéal de définition* de  $\mathfrak{X}$  si pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  il existe un voisinage ouvert de la forme  $\mathcal{D}(f)$  et un idéal  $I_f \subset A_{\{f\}}$  de définition tel que

$$\mathcal{I}|_{\mathcal{D}(f)} = I_f^\Delta.$$

Cette définition est naturelle d'après la proposition suivante [GD71, 10.3.5] :

**Proposition 7.11.** *Soit  $A$  un anneau admissible. Tout idéal de définition de  $\text{Spf}(A)$  est de la forme  $I^\Delta$  pour  $I$  un idéal de définition de  $A$ , uniquement déterminé.*

**Définition 7.12.** Soit  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  un schéma formel affine. Soit  $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in J}$  une famille d'idéaux de définition de  $\mathfrak{X}$ . On dit que  $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in J}$  est un *système fondamental d'idéaux de définition* si tout idéal de définition de  $\mathfrak{X}$  contient un  $\mathcal{I}_\lambda$  pour  $\lambda \in J$ .

Par la proposition précédente pour tout  $\lambda \in J$  il existe un idéal de définition  $I_\lambda \subset A$  tel que  $I_\lambda^\Delta = \mathcal{I}_\lambda$ . Alors  $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in J}$  est un système fondamental d'idéaux de définition si et seulement si  $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$  est un système fondamental de voisinages de 0 dans  $A$ , formé d'idéaux.

Soit  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux schémas formels affines. Alors un morphisme d'espaces annelés  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  est appelé *morphisme de schémas formels affines* si  $f$  est un morphisme local entre espaces annelés. Ceci définit la catégorie des schémas formels affines.

Soit  $A, B$  deux anneaux admissibles et  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme continu. Alors  $\varphi$  induit un morphisme d'espaces annelés  $f: \text{Spf}(B) \rightarrow \text{Spf}(A)$ . Alors d'après [GD71, 10.2.2]  $f$  est un morphisme de schémas formels affines et réciproquement, tout morphisme de schémas formels affines  $\text{Spf}(B) \rightarrow \text{Spf}(A)$  est induit par un morphisme continu  $A \rightarrow B$ . En somme, on a la proposition suivante :

**Proposition 7.13.** *On a une anti-équivalence de catégories,*

$$\{\text{Anneaux admissibles munis des morphismes continus}\} \leftrightarrow \{\text{schémas formels affines}\},$$

*donnée par  $A \rightsquigarrow \text{Spf}(A)$ . La pseudo-inverse est donnée par  $\mathfrak{X} \rightsquigarrow \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ .*

La proposition découle directement de ce qui précède et de [GD71, 10.1.3] qui dit que pour  $A$  un anneau admissible, on a un isomorphisme topologique,

$$\Gamma(\text{Spf}(A), \mathcal{O}_{\text{Spf}(A)}) \cong A.$$

Les définitions de quasi-compact, d'immersion, d'immersion fermée et d'immersion ouverte d'espaces annelés fournissent des définitions raisonnables pour les schémas formels affines. Elles seront utilisées dans la suite.

**Remarque 7.14.** Soit  $A$  un anneau muni de la topologie discrète, alors  $\text{Spf}(A) = \text{Spec}(A)$ . Ainsi la catégorie des schémas affines se plonge dans la catégorie des schémas formels affines.

7.2.2. Soit  $\mathfrak{X}$  un espace annelé. On dira qu'un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}$  est un *ouvert formel affine* lorsque  $\mathcal{U}$ , muni de la structure d'espace annelé induite par  $\mathfrak{X}$ , est un schéma formel affine. Dans la suite un ouvert formel adique sera considéré comme un schéma formel affine.

**Définition 7.15.** Un *schéma formel* est un espace localement annelé tel que chaque point admet un voisinage ouvert formel affine.

Cette définition est bien consistante grâce à la proposition [7.9]. Cette proposition nous assure que les ouverts formels affines forment une base de la topologie de Zariski. En vue de la proposition [7.13] on définit un morphisme de schéma formel  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  comme un morphisme local entre espaces annelés. On a directement les définitions de morphisme quasi-séparé, séparé, quasi-compact et d'immersion fermée et ouverte. Ainsi les schémas formels forment une catégorie que l'on note (**SchFor**).

On a la proposition suivante (cf. [GD71, 10.4.6]), qui étend la proposition [7.13] :

**Proposition 7.16.** *Soit  $A$  un anneau admissible et  $\mathfrak{X}$  un schéma formel. Alors, naturellement en  $A$  et  $\mathfrak{X}$ ,*

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathrm{Spf}(A)) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(A, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})),$$

où, à gauche, on a des morphismes de schémas formels et à droite les morphismes continus d'anneaux topologiques.

Les produits fibrés existent dans la catégorie des schémas formels (cf. [GD71, 10.7.3]). Rappelons brièvement la construction. Pour  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  et  $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ ,  $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(C)$ , deux schémas formels affines sur  $\mathfrak{X}$ , on pose

$$\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(B \hat{\otimes}_A C),$$

où " $\hat{\otimes}$ " désigne le produit tensoriel complété (cf. [GD71, 0.7.7]). Par la propriété universelle du produit tensoriel complété, ceci définit bien le produit fibré dans la catégorie des schémas formels affines. On peut conclure par le même argument que pour les schémas (cf. [GD71, 3.2.1]).

**Définition 7.17.** Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel. Un idéal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  est appelé *idéal de définition* de  $\mathfrak{X}$  si pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  il existe un voisinage ouvert formel affine  $\mathfrak{U}$  tel que  $\mathcal{I}|_{\mathfrak{U}}$  est un idéal de définition du schéma formel affine  $\mathfrak{U}$ .

De même, une famille  $(\mathcal{I}_{\lambda})_{\lambda \in J}$  d'idéaux de définition est appelé *système fondamental d'idéaux de définition* si pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ , il existe un voisinage ouvert formel affine  $U$  tel que  $(\mathcal{I}_{\lambda}|_U)_{\lambda \in J}$  est un système fondamental d'idéaux de définition du schéma formel affine induit par  $\mathfrak{X}$  sur  $U$ .

Notons qu'un schéma formel ne possède pas nécessairement un idéal de définition. Si  $A$  est un anneau admissible noeth'rien, il existe un plus grand idéal de définition. Ceci permet la proposition suivante [GD71, 10.5.4] :

**Proposition 7.18.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel localement noetherien. Il existe un plus grand idéal de définition  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . L'idéal  $\mathcal{I}$  est défini comme étant le plus grand idéal de définition  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  tel que le schéma usuel  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I})$  soit réduit.*

On introduit la définition suivante (cf. [Abb10, 2.1.24]) :

**Définition 7.19.** Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel. On dit que  $\mathfrak{X}$  est *préadique* si, pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ , il existe un voisinage ouvert formel affine  $\mathfrak{U}$  de  $x$  tel que  $\mathfrak{U}$  soit le spectre formel du complété d'un anneau pré-adique. Si, de plus,  $\mathfrak{X}$  possède un idéal de définition de type fini sur  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ , on dira que  $\mathfrak{X}$  est *adique*.

Le premier avantage de cette définition est que tout sous-schéma formel ouvert d'un schéma formel adique est adique, d'après la proposition [7.7] (cf. [Abb10, 2.1.29]). La proposition suivante nous assure que cette notion est cohérente (cf. [Abb10, 2.1.31]) :

**Proposition 7.20.** *Soit  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  un schéma formel affine. Alors  $\mathfrak{X}$  est adique si et seulement si  $A$  est adique.*

Les schémas formels adiques possèdent un système fondamental d'idéaux de définition. Plus précisément (cf. [Abb10, 2.1.30]) :

**Proposition 7.21.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel adique et  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un idéal de définition de type fini. Alors  $(\mathcal{I}^n)_{n \geq 1}$  est un système fondamental d'idéaux de définition de  $\mathfrak{X}$ .*

De même que pour les anneaux, on introduit une notion de morphisme adique :

**Définition 7.22.** Soit  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme de schémas formels. Si  $\mathfrak{X}$  est adique et s'il existe un idéal de définition de type fini  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de  $\mathfrak{Y}$  tel que  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  soit un idéal de définition de  $\mathfrak{X}$ , alors on dit que  $f$  est un *morphisme adique*.

Cette notion correspond à celle que l'on a introduite pour les anneaux. En effet, soit  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux admissibles. Alors par la proposition [7.13] le morphisme  $\varphi$  correspond à un morphisme de schémas formels  $f: \mathrm{Spf}(B) \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$  et  $\varphi$  est un morphisme adique si et seulement si  $f$  est un morphisme adique (cf. [Abb10, 2.2.8]). De plus, la notion de morphisme

adique est Zariski local (cf. [Abb10, 2.2.10]), ce qui implique en particulier que la composition de morphismes adiques est adique et que le changement de base d'un morphisme adique est adique.

On introduit plusieurs notions de finitude des morphismes (cf. [Abb10, 2.3]).

**Définition 7.23.** Soit  $\mathfrak{Y}$  un schéma formel adique et  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme de schémas formels. Si  $f$  est adique et si pour tout idéal de définition de type fini  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$  de  $\mathfrak{Y}$ , le morphisme de schéma usuel

$$f_0: (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{K}) \rightarrow (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathcal{I}), \text{ où } \mathcal{K} = f^*(\mathcal{I})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}},$$

est localement de présentation finie (resp. localement de type fini, fini, propre), on dira que  $f$  est *localement de présentation finie* (resp. *localement de type fini, fini, propre*). On dira que  $f$  est *de présentation finie* (resp. *de type fini*) si  $f$  est localement de présentation finie (resp. localement de type fini), quasi-compact et quasi-séparé.

On déduit assez facilement les propriétés usuelles de ces morphismes entre schémas formels à partir des propriétés correspondantes pour les schémas usuels (cf. [Abb10, 2.3]) : Ces notions sont locales pour la topologie de Zariski, stables par composition et stables par changement de base.

On introduit encore quelques classes de morphismes (cf. [Abb10, 2.4]) :

**Définition 7.24.** Soit  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme, on dit que  $f$  est *formellement lisse* (resp. *formellement non-ramifié, formellement étale*) si, pour tout schéma  $Y$  muni d'un morphisme d'espaces annelés  $Y \rightarrow \mathfrak{Y}$  et sous-schéma fermé  $Y' \subset Y$  défini par un idéal nilpotent de  $\mathcal{O}_Y$ , l'application induite

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Y, \mathfrak{X}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Y', \mathfrak{X})$$

est surjective (resp. injective, bijective). On dira que  $f$  est *lisse* (resp. *non-ramifié, étale*) si de plus il est de présentation finie.

On vérifie facilement que la composé de morphismes formellement lisses (resp. formellement non-ramifiés, formellement étales) est formellement lisse (resp. formellement non-ramifié, formellement étale), et que ces propriétés sont invariantes par changement de base. De plus, ces propriétés sont locales pour la topologie de Zariski.

**Définition 7.25.** On dit qu'un schéma formel est *idyllique* si tout point admet un voisinage ouvert formel affine qui est le spectre d'un anneau idyllique. On dit qu'un schéma formel est *localement formellement de type fini* si tout point admet un voisinage ouvert formel affine qui est le spectre d'un anneau localement formellement de type fini.

On renvoie à [Abb10, 2.8] pour les propriétés usuelles sur les schémas formels idylliques. Notons la proposition suivante qui assure que la notion est cohérente (cf. [Abb10, 2.8.13]) :

**Proposition 7.26.** *Soit  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme de présentation fini entre schémas formels. Si  $\mathfrak{Y}$  est idyllique,  $\mathfrak{X}$  est idyllique. En particulier tout sous-schéma formel ouvert d'un schéma idyllique est idyllique.*

On note  $(\mathbf{SchFor})^{\mathrm{id}}$  la catégorie des schémas formels idylliques. Les morphismes de cette catégorie sont les *morphismes de présentation finie*. De même, on note  $(\mathbf{SchFor})^{\mathrm{lftf}}$  la catégorie des schémas formels localement formellement de type fini. Les morphismes de cette catégorie seront les *morphismes de présentation finie*.

On note  $(\mathbf{SchFor})_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{id}}$  la sous-catégorie des schémas formels idylliques d'espace topologique sous-jacent quasi-compact. Notons que c'est la sous-catégorie des objets *quasi-compact* de  $(\mathbf{SchFor})^{\mathrm{id}}$ , pour la topologie de Zariski.

7.2.3. On explique la relation entre schémas formels et schémas usuels. Soit  $X$  un schéma et  $\iota: Y \hookrightarrow X$  un sous-schéma fermé défini par un idéal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  quasi-cohérent. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Alors on définit le *complété formel de  $\mathcal{F}$  le long de  $Y$*  par le faisceau suivant sur  $Y$  :

$$\widehat{\mathcal{F}}_Y = \varprojlim_{n \geq 1} \iota^{-1}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}^n).$$



Si aucune confusion n'est possible, on écrira simplement  $\widehat{\mathcal{F}}$ .

**Définition 7.27.** Le schéma formel  $(Y, (\widehat{\mathcal{O}_X})/Y)$  est appelé *le complété formel de  $X$  le long de  $Y$* . Tout schéma formel de cette forme sera dit *algébrisable*.

Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel,  $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in J}$  un système fondamental d'idéaux de définition de  $\mathfrak{X}$ . Alors pour tout  $\lambda \in J$ , l'espace annelé  $X_\lambda = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}_\lambda)$  est un schéma usuel et on a un morphisme de réduction entre espaces annelés

$$f_\lambda: \mathfrak{X} \rightarrow X_\lambda.$$

Soit  $\lambda, \mu \in J$  tel que  $\mathcal{I}_\lambda \subset \mathcal{I}_\mu$  alors  $f_\lambda$  induit une immersion fermée de schémas usuels

$$f_{\lambda, \mu}: X_\mu \rightarrow X_\lambda.$$

On obtient un système projectif de schémas  $(X_\lambda, f_{\lambda, \mu})_{\lambda, \mu}$ . On a la proposition suivante (cf. [GD71, 10.6.2]).

**Proposition 7.28.** *Le schéma formel  $\mathfrak{X}$  et la famille de morphismes  $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$  constituent une limite inductive du système  $(X_\lambda, f_{\lambda, \mu})_{\lambda, \mu \in J}$  dans la catégorie des schémas formels.*

On présente une réciproque à la proposition précédente dans le cas adique. Soit, pour tout entier  $n \geq 0$ , un schéma  $X_n$ . On suppose que les  $X_n$  ont tous le même espace topologique sous-jacent  $\mathfrak{X}$ . On fixe, pour tout entier  $n \geq 0$ , une immersion fermée  $i_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ .

**Proposition 7.29.** *Supposons que  $i_0$  fasse de  $X_0$  un schéma de type fini sur  $X_1$ . On pose*

$$\mathcal{O}_\mathfrak{X} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{X_n}.$$

*Alors  $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X})$  est un schéma formel adique. De plus, muni de morphismes d'espaces annelés  $u_n: X_n \rightarrow \mathfrak{X}$  pour tout entier  $n \geq 0$ , le schéma formel  $\mathfrak{X}$  est la limite du système inductif  $(X_n, u_n)_{n \geq 0}$  dans la catégorie des schémas formels.*

On renvoie à [Abb10, 2.1.36] pour plus de détails sur cette proposition.

7.2.4. Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel adique,  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_\mathfrak{X}$  un idéal de définition de type fini. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $\mathfrak{X}$ . On pose

$$\mathcal{H}_{\text{rig}}^0(\mathcal{F}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{\text{om}_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}}}(\mathcal{I}^n, \mathcal{F}),$$

la *clôture rigide* de  $\mathcal{F}$ . Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition choisi (cf. [Abb10, 2.10.1]). C'est un anneau pour le produit défini par la composition. On a un morphisme  $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ -linéaire

$$c_\mathcal{F}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{rig}}^0(\mathcal{F}).$$

Le noyau de ce morphisme  $\mathcal{F}_{\text{tor}}$  est appelé le *sous-module de torsion*.

**Définition 7.30.** Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel adique. Alors si  $(\mathcal{O}_\mathfrak{X})_{\text{tor}} = \mathcal{O}_\mathfrak{X}$  on dira que  $\mathfrak{X}$  est *rig-nul*. Si  $(\mathcal{O}_\mathfrak{X})_{\text{tor}} = 0$  on dira que  $\mathfrak{X}$  est *rig-pur*.

Il est facile de voir que  $\mathfrak{X}$  est rig-nul si et seulement si  $\mathcal{H}_{\text{rig}}^0(\mathcal{O}_\mathfrak{X}) = 0$ . On a la proposition suivante (cf. [Abb10, 2.10.6]) :

**Proposition 7.31.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique, soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ -algèbre. Alors  $c_\mathcal{A}$  est un morphisme d'anneaux qui induit sur  $\mathcal{H}_{\text{rig}}^0(\mathcal{A})$  une structure de  $\mathcal{H}_{\text{rig}}^0(\mathcal{O}_\mathfrak{X})$ -algèbre.*

Ainsi pour  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique,  $(\mathcal{O}_\mathfrak{X})_{\text{tor}}$  est naturellement un idéal de  $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ .

**Définition 7.32.** Le sous-schéma formel fermé de  $\mathfrak{X}$  défini par  $(\mathcal{O}_\mathfrak{X})_{\text{tor}}$  est appelé la *transformée stricte* de  $\mathfrak{X}$ .

Ainsi, à un schéma formel idyllique, on peut associer un sous-schéma formel rig-pur. Plus précisément on a la proposition suivante (cf. [Abb10, 2.10.12]) :

**Proposition 7.33.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique, alors  $(\mathcal{O}_\mathfrak{X})_{\text{tor}}$  est le plus grand idéal rig-nul de  $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ . En d'autres termes, la transformée stricte de  $\mathfrak{X}$  est le plus grand sous-schéma fermé rig-pur de  $\mathfrak{X}$ .*

Dans le cas affine on a la description suivante (cf. [Abb10, 2.10.5]) :

**Proposition 7.34.** *Soit  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  un schéma formel idyllique affine et  $I \subset A$  un idéal de définition. Soit  $\mathfrak{F}$  un module quasi-cohérent sur  $\mathfrak{X}$ . On note  $U = \mathrm{Spec}(A) - V(I)$  et  $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{H}_{\mathrm{rig}}^0(\mathfrak{F}))$ . Alors*

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{H}_{\mathrm{rig}}^0(\mathfrak{F})) &= \Gamma(U, \widetilde{M}), \\ \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_{\mathrm{tor}}) &= M_{\mathrm{tor}},\end{aligned}$$

où  $M_{\mathrm{tor}} = \{m \in M \mid \exists k \geq 0, I^k m = 0\}$ . En particulier la transformée stricte de  $\mathfrak{X}$  est de la forme  $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A')$  où  $A' = A/A_{\mathrm{tor}}$ .

7.2.5. On définit maintenant les éclatements admissibles qui seront cruciaux dans la définition des espaces rigides (cf. [Abb10, Chap 3]).

Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel adique d'idéal de définition  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  de type fini. Soit  $\mathcal{A}$  un idéal ouvert de type fini de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ . Par le second point de la proposition [7.29] on voit  $\mathfrak{X}$  comme la limite du système  $(X_n, \iota_n)_{n \geq 1}$ . Rappelons que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}^n)$  et  $\iota_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$  est donné par le morphisme de réduction. Posons

$$X'_n = \mathrm{Proj} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}^m \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n} \right).$$

Pour tout entier  $n \geq 0$  on a alors un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'_n & \xrightarrow{\iota'_n} & X'_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow{\iota_n} & X_{n+1}. \end{array} \quad (7.1)$$

Ainsi la limite du système inductif  $(X'_n, \iota'_n)$  définit, par la proposition [7.29] un schéma formel adique  $\mathfrak{X}'$  muni d'un morphisme  $\varphi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  de type fini. Cette construction ne dépend pas de l'idéal de définition (cf. [Abb10, 3.1.1.4]). On dit que  $\mathfrak{X}'$  est l'éclatement de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathfrak{X}$ .

**Définition 7.35.** Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel adique,  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  un idéal de définition. Soit  $\varphi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  un morphisme de type fini. On dit que c'est un *éclatement admissible* si  $\varphi$  est isomorphe à l'éclatement d'un idéal ouvert dans  $\mathfrak{X}$ .

On introduit un invariant pour les éclatements admissibles :

**Définition 7.36.** On appelle *point rigide* le spectre formel d'un anneau 1-*valuatif*. On rappelle qu'un anneau  $A$  est 1-*valuatif* si c'est un anneau de valuation, complet et séparé, de hauteur 1 muni de la topologie linéaire dont les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts.

**Définition 7.37.** Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique. Soit  $\mathfrak{P}$  un sous-schéma formel fermé de  $\mathfrak{X}$ . On dit que c'est un *point rigide de  $\mathfrak{X}$*  si  $\mathfrak{P}$  est un point rigide. On note  $\langle \mathfrak{X} \rangle$  l'ensemble des points rigides de  $\mathfrak{X}$ .

L'association  $\mathfrak{X} \rightsquigarrow \langle \mathfrak{X} \rangle$  définit un foncteur de la catégorie des schémas formels dans la catégorie des ensembles. On a la description suivante dans le cas affine (cf. [Abb10, 3.3.2]) :

**Proposition 7.38.** *Soit  $A$  un anneau idyllique muni d'un idéal de définition  $I \subset A$  de type fini. Si on pose  $X_g = \mathrm{Spec}(A) - V(I)$ , alors  $X_g$  est naturellement en bijection avec les points rigides de  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ .*

Ainsi on peut considérer le foncteur  $\mathfrak{X} \rightsquigarrow \langle \mathfrak{X} \rangle$  comme un foncteur de la catégorie des schémas formels affines dans la catégorie des schémas affine par la naturalité. Dans le cas rig-pur on a la proposition suivante (cf. [Abb10, 3.3.11])

**Proposition 7.39.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique rig-pur. Soit  $(\mathfrak{U}_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $\mathfrak{X}$  munis de sous-schéma formel de  $\mathfrak{X}$ . Alors  $(\mathfrak{U}_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $\mathfrak{X}$  si et seulement si*

$$\langle \mathfrak{X} \rangle = \bigcup_{i \in I} \langle \mathfrak{U}_i \rangle.$$



En particulier  $\mathfrak{X}$  est vide si et seulement si  $\langle \mathfrak{X} \rangle$  est vide.

Étant donné que les éclatements admissibles ne changent pas les points rigides, on a la proposition suivante (cf. [Abb10] 3.3.8) :

**Proposition 7.40.** *Soit  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{X}'$  des schémas formels idylliques. Alors si  $\varphi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  est un éclatement admissible, l'application induite sur les points rigides  $\langle \varphi \rangle: \langle \mathfrak{X}' \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{X} \rangle$  est bijective.*

En vue de ce qui précède on obtient qu'un éclatement admissible  $\varphi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  de schémas formels affines induit un isomorphisme  $\langle \varphi \rangle: \langle \mathfrak{X}' \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{X} \rangle$ . Les éclatements admissibles se comportent bien vis-à-vis des schémas rig-purs (cf. [Abb10] 3.5.9) :

**Proposition 7.41.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique et soit  $\varphi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  un éclatement admissible. Si  $\mathfrak{X}$  est rig-pur,  $\varphi$  est un épimorphisme dans la catégorie des schémas formels.*

**7.3. Espaces rigides.** Dans cette sous-section on rappelle et on étend la construction de Raynaud.

7.3.1. On note  $\mathbf{B}$  l'ensemble des éclatements admissibles de  $(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}$ . Pour  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique quasi-compact on note  $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$  la sous-catégorie pleine de  $(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}$  formée des couples  $(\mathfrak{X}', \varphi)$  tels que  $\varphi: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  appartient à  $\mathbf{B}$ . On renvoie à [Abb10] 4.1.4] pour la proposition suivante :

**Lemme 7.42.** *L'ensemble  $\mathbf{B}$  permet un calcul de fractions à droite dans la catégorie  $(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}$ . De plus, pour tout schéma formel idyllique quasi-compact  $\mathfrak{X}$ , la catégorie  $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$  est co-filtrante.*

Ainsi, on peut localiser par rapport aux éclatements admissibles. On note  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ , la catégorie des *espaces rigides cohérents*, la localisation à droite de  $(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}$  par rapport à  $\mathbf{B}$ . On note

$$Q: (\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}} \rightarrow (\mathbf{Rig})^{\text{coh}},$$

le foncteur de localisation, appelé *le foncteur fibre générique*. Pour  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique quasi-compact on notera  $\mathfrak{X}^{\text{rig}} = Q(\mathfrak{X})$  la *fibre générique* de  $\mathfrak{X}$  et pour  $f$  un morphisme de  $(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}$  on notera  $f^{\text{rig}} = Q(f)$  la *fibre générique* de  $f$ . Soit  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux schémas formels idylliques quasi-compactes. Un morphisme  $f: \mathfrak{X}^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}}$  est la donnée d'un triplet  $(f', \mathfrak{X}', \varphi)$  tel que  $(\mathfrak{X}', \varphi)$  est un objet de  $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$  et  $f': \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme de présentation fini. En d'autres termes :

$$\text{Hom}_{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}}(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathfrak{Y}^{\text{rig}}) = \varinjlim_{\mathfrak{X}' \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}} \text{Hom}_{(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}).$$

**Remarque 7.43.** Le schéma formel vide  $\emptyset$  est un objet initial dans  $(\mathbf{SchFor})_{\text{qc}}^{\text{id}}$ . Il est strict au sens de [SGA72a] II, 4.5]. L'image de ce dernier,  $\emptyset^{\text{rig}} = Q(\emptyset)$  est un objet initial de  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ . L'espace rigide cohérent  $\emptyset^{\text{rig}}$  est un objet initial strict.

On a la proposition suivante (cf. [Abb10] 4.1.14) :

**Proposition 7.44.** *Les produits fibrés existent dans  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$  et  $Q$  commute aux produits fibrés. De plus, les sommes finies sont représentables et  $Q$  commute aux sommes finies.*

Le second point est essentiellement dû à ce qu'une somme finie d'éclatements admissibles est un éclatement admissible. En particulier les sommes finies dans  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$  sont disjointes au sens de [SGA72a] II, 4.5].

**Définition 7.45.** Pour  $X$  un espace rigide cohérent, on appelle un schéma formel idyllique quasi-compact  $\mathfrak{X}$  tel que  $\mathfrak{X}^{\text{rig}} = X$  un *modèle formel* de  $X$ .

Pour  $g: X \rightarrow Y$  un morphisme entre espaces rigides cohérents, on appelle un morphisme de présentation finie entre schémas formels idylliques quasi-compactes  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un *modèle formel* de  $g$  si  $f^{\text{rig}}$  est isomorphe à  $g$ .

On veut se ramener aux schémas formels rig-purs. La proposition suivante le permet (cf. [Abb10] 4.1.18]

**Proposition 7.46.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique quasi-compact. Soit  $\mathfrak{Y}$  sa transformée stricte et  $j: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  l'immersion fermée canonique. Alors  $j^{\text{rig}}: \mathfrak{Y}^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$  est un isomorphisme.*

Cette proposition nous assure que tout espace rigide cohérent admet un modèle formel rig-pur. De plus, pour tout morphisme entre espaces rigides cohérents  $g: X \rightarrow Y$ , il existe un modèle formel  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  tel que  $\mathfrak{X}$  soit rig-pur.

On définit maintenant plusieurs classes de morphismes à partir de leurs modèles formels. On renvoie à [Abb10, 4.2] pour plus de détails.

**Définition 7.47.** Soit  $g: X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces rigides cohérents. Alors on dit que  $g$  est une *immersion* (resp. *immersion fermée*, *immersion ouverte*) s'il admet un modèle formel  $f$  qui est une immersion (resp. immersion fermée, immersion ouverte). De même, on dira qu'un morphisme  $g: X \rightarrow Y$  d'espaces rigides cohérents est *fini* (resp. *propre*) s'il admet un modèle formel qui est un morphisme fini (resp. propre).

On vérifie (avec un peu de travail) que ces notions sont stables par composition et par changement de base (cf. [Abb10, 4.2]). De plus, les immersions fermées sont finis, les morphismes finis sont propres et les immersions sont des monomorphismes.

On a la proposition suivante (cf. [Abb10, 4.2.11-17]) :

**Proposition 7.48.** Soit  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme entre schémas formels idylliques quasi-compacts. Alors si  $\mathfrak{X}$  est rig-pur,  $f^{rig}: \mathfrak{X}^{rig} \rightarrow \mathfrak{Y}^{rig}$  est propre (resp. fini) si et seulement si  $f$  est propre (resp. fini).

7.3.2. On veut maintenant munir la catégorie des espaces rigides cohérents d'une topologie de Grothendieck pour définir le topos des faisceaux. On définira les espaces rigides quasi-séparés comme une sous-catégorie de ce topos. Soit  $(\widehat{\mathbf{SchFor}})_{qc}^{id}$  (resp.  $(\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh}$ ) la catégorie des pré-faisceaux d'ensembles sur  $(\mathbf{SchFor})_{qc}^{id}$  (resp.  $(\mathbf{Rig})^{coh}$ ) dans les ensembles. On a un foncteur de Yoneda

$$\mathbf{h}: (\mathbf{SchFor})_{qc}^{id} \rightarrow (\widehat{\mathbf{SchFor}})_{qc}^{id}, \quad (\text{resp. } \mathbf{h}: (\mathbf{Rig})^{coh} \rightarrow (\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh}),$$

pleinement fidèle. Le foncteur de localisation  $Q$  donne un foncteur

$$Q^*: (\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh} \rightarrow (\widehat{\mathbf{SchFor}})_{qc}^{id}.$$

D'après [SGA72a, I, 5.1] ce foncteur admet un adjoint à gauche

$$Q_!: (\widehat{\mathbf{SchFor}})_{qc}^{id} \rightarrow (\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh},$$

qui est exact à gauche (cf. [Abb10, 4.1.13]). Ces foncteurs commutent aux foncteurs de Yoneda. En somme, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{SchFor})_{qc}^{id} & \xrightarrow{Q} & (\mathbf{Rig})^{coh} \\ \downarrow \mathbf{h} & & \downarrow \mathbf{h} \\ (\widehat{\mathbf{SchFor}})_{qc}^{id} & \xrightarrow{Q_!} & (\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh} \end{array} \quad (7.2)$$

Il résulte de (cf. [Abb10, 4.1.13]) que  $Q_!$  est exact à gauche et commute donc aux produits fibrés.

**Définition 7.49.** Soit  $X$  un objet de  $(\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh}$ . On appelle *point rigide de  $X$*  tout couple  $(P, p)$  où  $P$  est un point rigide, vue dans  $(\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh}$  par  $Q_! \circ \mathbf{h}$  et  $p: P \rightarrow X$  est un morphisme de  $(\widehat{\mathbf{Rig}})^{coh}$ .

On dit qu'un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  entre pré-faisceaux sur  $(\mathbf{Rig})^{coh}$  est *couvrant pour les points rigides* si, pour tout point rigide  $(P, p)$  de  $Y$ , il existe un point rigide  $(Q, q)$  de  $X$  tel que

$$\mathrm{Hom}_Y(Q, P) \neq 0.$$

De même, si  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  est une famille de morphismes de pré-faisceaux sur  $(\mathbf{Rig})^{coh}$ , on dit qu'elle est *couvrante pour les points rigides* si le morphisme induit  $\coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ , est couvrant pour les points rigides.

Un morphisme de présentation fini entre points rigides est couvrant pour les points rigides (cf. [Abb10, 4.3.4]). On a de plus (cf. [Abb10, 4.3.5]) :

**Proposition 7.50.** *Soit  $X$  un espace rigide cohérent. Soit  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  une famille de morphismes d'espaces rigides cohérents. Cette famille est couvrante pour les points rigides si et seulement si l'application induite  $\coprod_{i \in I} \langle X_i \rangle \rightarrow \langle X \rangle$  est surjective.*

Grâce à la proposition 7.39 et un argument de recouvrement (cf. [Abb10, 4.2.13]) on obtient la proposition suivante (cf. [Abb10, 4.3.6]) :

**Proposition 7.51.** *Soit  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  une famille d'immersions ouvertes d'espaces rigides cohérents. Alors il existe un modèle formel rig-pur  $\mathfrak{X}$  et une famille de sous-schémas formels  $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$  de  $\mathfrak{X}$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}$  est  $X$ -isomorphe à  $X_i$ . De plus, la famille  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  est couvrante pour les points rigides si et seulement si*

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i.$$

**Définition 7.52.** Soit  $X$  un espace rigide cohérent. On dit qu'une famille  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  d'immersions ouvertes est un *recouvrement admissible* s'il existe une sous-famille finie couvrante pour les points rigides.

De la proposition précédente on déduit que les recouvrements admissibles forment une prétopologie (cf. [SGA72a, II 1.3]). On considère le site engendré par cette topologie.

**Définition 7.53.** On appelle *topologie admissible* la topologie engendrée par les recouvrements admissibles.

Ainsi on peut considérer les faisceaux pour cette topologie. On définit le *topos admissible*,  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$  comme le topos des faisceaux sur  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$  pour la topologie admissible. On le munit de la topologie canonique (cf. [SGA72a, II 2.5]). Ainsi on obtient un foncteur de Yoneda

$$\epsilon: (\mathbf{Rig})^{\text{coh}} \rightarrow \widehat{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}},$$

qui est fidèlement plat. On a directement la proposition suivante d'après [SGA72b, VI 1.2-10-18].

**Proposition 7.54.** *La catégorie  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$  est cohérente, c'est-à-dire que c'est une sous-catégorie quasi-compacte dont tout objet est quasi-séparé.*

7.3.3. On définit dans ce paragraphe les espaces rigides quasi-séparés.

**Définition 7.55.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de  $\widehat{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}}$ . On dit qu'il est *représentable* si pour tout espace rigide cohérent  $X'$  et morphisme  $X' \rightarrow X$ , le produit  $X' \times_Y X$  est représentable par un objet de  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ . On dira de plus que  $f$  est une *immersion quasi-compacte* (resp. *immersion fermée*, *immersion ouverte quasi-compacte*) si pour tout espace rigide cohérent  $X'$  et morphisme  $X' \rightarrow X$  le morphisme  $X' \times_Y X \rightarrow X'$  est une immersion (resp. immersion fermée, immersion ouverte) dans  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ .

Il est facile de déduire que la composé de morphismes représentables est représentable et que la composé d'immersions quasi-compacte (resp. immersion fermée, immersion ouverte quasi-compacte) est une immersion quasi-compacte (resp. immersion fermée, immersion ouverte quasi-compacte). De plus, ces notions sont stables par changement de base. Ces définitions ont un sens dans le topos  $\widehat{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}}$ . On renvoie à [Abb10, 7.1.5] pour la proposition suivante :

**Proposition 7.56.** *Soit  $f: X \rightarrow Y$  une immersion quasi-compacte de  $\widehat{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}}$ . Si  $Y$  est un faisceau pour le site admissible, alors il en est de même pour  $X$ . De plus,  $f$  est un morphisme cohérent au sens de [SGA72b, VI 1.7].*

**Définition 7.57.** Une famille  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  d'immersions ouvertes quasi-compactes de  $\widehat{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}}$  est un *recouvrement admissible* si pour tout espace rigide cohérent  $Y$  et tout morphisme  $Y \rightarrow X$  la famille  $(X_i \times_X Y \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement admissible dans  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ .

On définit la *catégorie des espaces rigides quasi-séparés*  $(\mathbf{Rig})_{\text{qs}}$  comme la sous-catégorie pleine de  $\widehat{(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}}$  dont les objets sont les faisceaux qui admettent un recouvrement admissible par des

espaces rigides cohérents. On le munit de la topologie induite et par le foncteur canonique on obtient

$$\alpha: (\mathbf{Rig})^{\text{coh}} \rightarrow (\mathbf{Rig})_{\text{qs}},$$

qui est un foncteur pleinement fidèle. On identifiera les espaces rigides cohérents comme sous-catégorie des espaces rigides séparés. C'est une sous-catégorie génératrice dont les objets sont quasi-compacts. Réciproquement (cf. [Abb10, 7.1.11]) :

**Proposition 7.58.** *Un espace rigide quasi-séparé est un espace rigide cohérent si et seulement si c'est un objet quasi-compact.*

On en déduit que les morphismes représentables de  $(\mathbf{Rig})_{\text{qs}}$  sont quasi-compacts. On a la caractérisation suivante des espaces rigides quasi-séparés (cf. [Abb10, 7.1.12]) :

**Proposition 7.59.** *Un objet de  $\widetilde{(\mathbf{Rig})}^{\text{coh}}$  est un espace rigide quasi-séparé si et seulement si il est ind-représentable par un ind-objet de  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ , tel que les morphismes de transition sont des immersions ouvertes.*

On en déduit directement que les espaces rigides quasi-séparés sont bien des objets quasi-séparés.

**Définition 7.60.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés, on dira que  $f$  une *immersion* (resp. *immersion ouverte*) si pour tout espace rigide cohérent  $X'$  et toute immersion ouverte  $g: X' \rightarrow X$  la composé  $f \circ g$  est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte).

Il est clair qu'une immersion quasi-compacte est une immersion. La composé d'immersions (resp. d'immersions ouvertes) est une immersion (resp. immersion ouverte) et le changement de base d'une immersion (resp. immersion ouverte) est une immersion (resp. immersion ouverte). On dira qu'un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  entre espaces rigides quasi-séparés est séparé si le morphisme diagonal

$$\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X,$$

est une immersion fermée. Les morphismes séparés sont stables par composition et changement de base.

**Définition 7.61.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés. Si  $f$  est représentable et si, pour tout espace rigide cohérent  $X'$ , le morphisme  $X' \times_Y X \rightarrow X'$  est propre (resp. fini) dans  $(\mathbf{Rig})^{\text{coh}}$ , on dira que  $f$  est *propre* (resp. *fini*).

La composée et le changement de base des morphismes propres (resp. finis) sont des morphismes propres (resp. finis) (cf. [Abb10, 7.2.10]). Sur le modèle de la définition [7.24] on dira qu'un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés est *lisse*, *non-ramifié* ou *étale*. Ces morphismes sont stables par composition et changement de base. On a la proposition suivante (cf. [Abb10, 7.2.14]) :

**Proposition 7.62.** *Une immersion d'espaces rigides quasi-séparés (resp. une immersion ouverte) est non ramifiée (resp. étale).*

**Définition 7.63.** On dira qu'un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  d'espaces rigides quasi-séparés est un *revêtement étale* si c'est un morphisme étale et fini.

**7.4. Schémas formels  $\pi$ -adiques.** Soit  $R$  un anneau à valuation discrète que l'on suppose de caractéristique 0. On note  $\pi \in R$  une uniformisante et  $K$  le corps des fractions muni de la topologie induite par la norme  $|\cdot|$ . Dans cette partie on va étudier les schémas formels et les espaces rigides quasi-séparés au dessus de  $R$ . On notera

$$(\mathbf{SchFor}/R)_{\text{qc}}^{\text{id}} \quad (\mathbf{Rig}/K)^{\text{coh}} \quad (\mathbf{Rig}/K)_{\text{qs}}$$

les catégories des  $\text{Spf}(R)$ -objets (resp.  $\text{Spf}(R)^{\text{rig}}$ -objets) des catégories précédemment utilisées, ce qui a un sens car  $R$  est un anneau idyllique. Les objets de  $(\mathbf{Rig}/K)^{\text{coh}}$  (resp.  $(\mathbf{Rig}/K)_{\text{qs}}$ ) sont appelés  $K$ -espaces rigides cohérents (resp.  $K$ -espaces rigides quasi-séparés). Toutes les constructions précédentes ont un sens dans ce contexte.

7.4.1. Soit  $n \geq 0$  un entier. On considère l'algèbre de Tate sur  $R$ , c'est-à-dire l'algèbre des séries formelles restreintes sur  $R$ . En terme de la norme on a :

$$R\{X_1, \dots, X_n\} = \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \mid \forall \nu \in \mathbb{N}^n \ a_\nu \in K, \lim_{\nu_1 + \dots + \nu_n \rightarrow \infty} |a_\nu| = 0 \right\}.$$

On pose  $K\{X_1, \dots, X_n\} = R\{X_1, \dots, X_n\} \hat{\otimes}_R K$ . On a de même :

$$K\{X_1, \dots, X_n\} = \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \mid \forall \nu \in \mathbb{N}^n \ a_\nu \in K, \lim_{\nu_1 + \dots + \nu_n \rightarrow \infty} |a_\nu| = 0 \right\}.$$

On munit  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  de la norme de Gauss  $\|\cdot\|$ , définie par

$$\|f\| = \sup_{\nu} |a_\nu|, \text{ pour } f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}.$$

Muni de cette norme,  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  est une algèbre de Banach sur  $K$ . Cet anneau est noethérien (cf [BGR84, 5.2.6 Théorème 1]). De plus,  $R\{X_1, \dots, X_n\}$  est noethérien, en effet  $R\{X_1, \dots, X_n\}$  est noetherien donc sa complétion  $\pi$ -adique,  $R\{X_1, \dots, X_n\}$ , est noethérienne d'après la proposition 7.4. Ainsi une  $R$ -algèbre topologiquement de type fini est noetherienne.

**Définition 7.64.** Soit  $B$  une  $K$ -algèbre. On dit que c'est une algèbre  $K$ -affinoïde s'il existe un entier  $n \geq 0$  et une surjection stricte

$$K\{X_1, \dots, X_n\} \twoheadrightarrow B.$$

Comme les idéaux de  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  sont fermés (cf [BGR84, 5.2.7 Corollary 2]), toute algèbre  $K$ -affinoïde est une algèbre de Banach. Les algèbres  $K$ -affinoïdes forment une catégorie pour les morphismes continus. Comme  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  est noethérienne, toute algèbre  $K$ -affinoïde est topologiquement de présentation finie. Ainsi on obtient un foncteur de la catégorie des  $R$ -algèbres idylliques dans les algèbres  $K$ -affinoïdes donné par  $A \rightsquigarrow A \hat{\otimes}_R K$ . Ce foncteur est le foncteur de localisation par rapport à la partie multiplicative des morphismes induit par la famille  $\{\pi^n\}_{n \geq 0}$ .

Les  $K$ -algèbres affinoïdes décrivent les espaces rigides affines. On dit qu'un espace rigide quasi-séparé est affine s'il est de la forme  $\mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$  pour  $A$  une algèbre idyllique. Les espaces rigides affines forment une sous-catégorie pleine des espaces rigides quasi-séparés. De plus, ce sont des espaces rigides cohérents. On a le résultat suivant :

**Proposition 7.65.** On a une équivalence de catégories

$$\{\text{algèbres } K\text{-affinoïdes}\} \leftrightarrow \{K\text{-espaces rigides affines}\}.$$

*Démonstration.* On sait que la catégorie des schémas formels affines idylliques sur  $R$  est équivalente à la catégorie des anneaux idylliques sur  $R$ . Le foncteur de localisation précédemment décrit donne un foncteur des schémas formels affines sur  $R$  dans la catégorie des algèbres  $K$ -affinoïdes  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A) \rightsquigarrow A \hat{\otimes}_R K$ . On veut montrer que ce foncteur se factorise par les éclatements admissibles. Soit  $\varphi : \mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathrm{Spf}(B)$  un éclatement admissible de schémas formels idylliques affines sur  $R$ . D'après la proposition 7.38, l'application induite  $\varphi \hat{\otimes}_K : B \hat{\otimes}_R K \rightarrow A \hat{\otimes}_R K$  correspond au morphisme de schémas usuels

$$\langle \varphi \rangle : \langle \mathrm{Spf}(A) \rangle \rightarrow \langle \mathrm{Spf}(B) \rangle,$$

qui est un isomorphisme d'après la proposition 7.40. On a obtenu un foncteur

$$\{K\text{-espaces rigides affines}\} \rightarrow \{\text{algèbres } K\text{-affinoïdes}\}.$$

Soit  $B$  une algèbre  $K$ -affinoïde. Posons  $B^\circ = \{f \in B \mid \|f\| \leq 1\}$ , c'est une  $R$ -algèbre topologiquement de type fini et donc de présentation finie. Ainsi  $A$  est idyllique et  $\mathrm{Spf}(B^\circ)^{\mathrm{rig}}$  est un espace rigide affine. On a défini un foncteur

$$\{\text{algèbres } K\text{-affinoïdes}\} \rightarrow \{K\text{-espaces rigides affines}\}.$$

La composée à gauche avec le foncteur précédent est bien l'identité. Calculons la composée à droite. Soit  $X$  un  $K$ -espace rigide affine et  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  un modèle formel tel que  $A$  soit rig-pur. On veut construire un éclatement admissible entre  $\mathrm{Spf}(A)$  et  $\mathrm{Spf}((A \hat{\otimes}_R K)^\circ)$ . On a besoin d'un lemme (cf [Abb10, 3.1.11]) :

**Lemme 7.66.** *Soit  $A$  une  $R$ -algèbre linéairement topologisée qui est un anneau idyllique rig-pur. Soit  $A'$  une sous- $A$ -algèbre finie de  $A \otimes_R K$  considérée comme une  $A$ -algèbre adique. Alors*

$$\mathrm{Spf}(A') \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$$

*est un éclatement admissible.*

□

On applique ce lemme à  $A' = (A \hat{\otimes}_R K)^\circ$  qui est une sous- $A$ -algèbre finie de  $A \otimes_R K$ . En effet pour  $f \in A$  on a  $\|f\| \leq 1$ . De plus,  $A'$  est une sous- $A$ -algèbre finie  $A \hat{\otimes}_R K$  par le théorème de Grauert-Remmert. C'est bien une  $A$ -sous algèbre finie de  $A \otimes_R K$ , donc

$$\mathrm{Spf}((A \hat{\otimes}_R K)^\circ)^{\mathrm{rig}} \cong \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}.$$

Ce qui conclut la preuve.

□

On notera  $B \rightsquigarrow \mathrm{Spm}(B)$  l'équivalence dans le sens direct.

7.4.2. Dans cette section, on construit le foncteur de Berthelot à partir de ce qu'on a introduit. Soit  $n \geq 0$  un entier,  $r$  un réel strictement positif. On définit une sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles sur  $K$  :

$$K\{r^{-1}X_1, \dots, r^{-1}X_n\} = \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \mid \forall \nu \in \mathbb{N}^n \ a_\nu \in K, \lim_{\nu_1 + \dots + \nu_n \rightarrow \infty} |a_\nu| r^{\nu_1 + \dots + \nu_n} = 0 \right\}.$$

C'est une algèbre de Banach pour la norme de Gauss, définie par

$$\|f\|_r = \sup_{\nu} |a_\nu| r^{\nu_1 + \dots + \nu_n}, \text{ pour } f = \sum_{\nu: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}.$$

Dans certains cas ces algèbres sont  $K$ -affinoïdes (cf. [BGR84](#) 6.1.5).

**Proposition 7.67.** *Supposons que  $r \in |\bar{K}|$ , alors  $K\{r^{-1}X_1, \dots, r^{-1}X_n\}$  est une algèbre  $K$ -affinoïde.*

Pour  $0 \leq r \leq r'$  on a un morphisme de restriction  $K\{r'^{-1}X_1, \dots, r'^{-1}X_n\} \rightarrow K\{r^{-1}X_1, \dots, r^{-1}X_n\}$  obtenu simplement par  $f \mapsto f$ . De plus si  $r < 1$  on a une injection

$$R[[X_1, \dots, X_n]] \hookrightarrow K\{r^{-1}X_1, \dots, r^{-1}X_n\}.$$

On en déduit le lemme suivant :

**Lemme 7.68.** *Soit  $\{r_m\}_{m \geq 1}$  une suite de réels positifs tels que pour tout entier  $m \geq 1$  on a  $r_m < 1$ . Alors*

$$K[[X_1, \dots, X_n]] \cong \varprojlim_m K\{r_m^{-1}X_1, \dots, r_m^{-1}X_n\},$$

où la limite projective se fait par rapport aux morphismes de restrictions. De plus, dans la catégorie des espaces rigides affines les morphismes de transition sont des immersions ouvertes.

*Démonstration.* Il est clair que les morphismes de transition définissent des immersions ouvertes. Comme indiqué on a pour tout  $m \geq 1$  un morphisme

$$R[[X_1, \dots, X_n]] \hookrightarrow K\{r_m^{-1}X_1, \dots, r_m^{-1}X_n\},$$

ce qui induit un morphisme

$$R[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow \varprojlim_m K\{r_m^{-1}X_1, \dots, r_m^{-1}X_n\}.$$

Montrons que ce morphisme est continu. Soit  $I = \langle p, X_1, \dots, X_n \rangle \subset R[[X_1, \dots, X_n]]$ . Le membre de droite est muni de la topologie produit. Soit  $k \geq 1$  un entier, alors l'image de  $I^k$  est incluse dans

$$\left\{ f \mid \forall m \geq 1, \|f\| \leq \sup_{0 \leq i \leq k} |\pi|^i r_m^{k-i} \right\}.$$



Ainsi le morphisme est continu. Par la propriété universelle du produit tensoriel complété on obtient un morphisme

$$K[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow \varprojlim_m K\{r_m^{-1}X_1, \dots, r_m^{-1}X_n\}.$$

Or, les membres de la limite sont tous inclus dans le membre de gauche, ainsi on a un isomorphisme.  $\square$

**Remarque 7.69.** Géométriquement, ce lemme dit que la boule unité fermée est l'union croissante de boules ouvertes de rayon plus petit.

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 7.70.** *Toute  $K$ -algèbre formellement de type fini est une limite projective de  $K$ -algèbres formellement de type fini tel que les morphismes de transition définissent des immersions ouvertes.*

*Démonstration.* Soit  $B$  une algèbre  $K$ -affinoïde. Alors il existe des entiers  $m, n \geq 0$  et une surjection stricte

$$K\{X_1, \dots, X_n\}[[Y_1, \dots, Y_m]] \twoheadrightarrow B.$$

Soit  $\{r_m\}_{m \geq 1}$  une suite croissante de réels tel que pour tout entier  $m \geq 1$  on a  $r_m \in |\bar{K}|$  et  $r_m \geq 1$ . Soit  $m \geq 1$  un entier fixé, on applique  $\cdot \hat{\otimes} K\{r_m^{-1}Y_1, \dots, r_m^{-1}Y_n\}$  à la surjection précédente

$$K\{X_1, \dots, X_n\}\{r_m^{-1}Y_1, \dots, r_m^{-1}Y_n\} \twoheadrightarrow B_m = B \hat{\otimes} K\{r_m^{-1}Y_1, \dots, r_m^{-1}Y_n\}.$$

Donc  $B_m$  est une algèbre  $K$ -affinoïde et comme les immersions ouvertes sont stables par changement de base, le morphisme de transition  $B_{m+1} \rightarrow B_m$  définit une immersion ouverte. Comme les limites et co-limites commutent (cf. [SGA72a, Corollaire 8.9.2]) on obtient par le lemme précédent

$$B \cong \varprojlim_m B_m.$$

$\square$

Par la proposition [7.59] on obtient un foncteur de la catégorie des schémas formels affines formellement de présentation finie dans les espaces rigides quasi-séparés. D'après [SGA72a, I 8.6] on obtient un foncteur entre les ind-objets de ces catégories. Or, comme  $Q$  commute aux sommes finies et que tout schéma formel localement formellement de présentation finie est une limite inductive de schémas formels formellement de présentation finie où les morphismes de transition sont des immersions ouvertes, on obtient un foncteur

$$Q: (\mathbf{SchFor}/R)^{\text{lftf}} \rightarrow (\mathbf{Rig}/K)_{\text{qs}}.$$

On l'appellera encore le *foncteur fibre générique*. On vérifie que ce foncteur est le même que celui introduit en [RZ96, 5.1-5.12].

7.4.3. Dans ce paragraphe on définit les schémas formels normaux et la normalisation dans la fibre générique. La référence principale est [EGL08, Chap I Annexe A].

Soit  $X = \text{Spm}(B)$  un espace rigide affine sur  $K$ . Alors on dit que  $X$  est *réduit* si  $B$  est réduit. L'algèbre  $K$ -affinoïde  $B$  est réduite si et seulement si tout ses localisés complétés en des éléments non-diviseurs de zéro sont tous réduits. Ceci justifie la définition suivante :

**Définition 7.71.** Soit  $X$  un espace rigide quasi-séparé sur  $K$ . On dit que  $X$  est *réduit* si il existe un recouvrement admissible par des espaces rigides affines réduits.

Notons que si  $X$  est un espace rigide quasi-séparé et réduit sur  $K$ , alors pour toute immersion ouverte  $U \hookrightarrow X$ ,  $U$  est réduit.

Soit  $X = \text{Spm}(B)$  est un espace rigide affine réduit sur  $K$ . Supposons que  $B$  soit intègre, on dira que  $X$  est *normal* si  $B$  est intégralement clos. De manière équivalente on peut demander que tout les localisés complétés de  $B$  en des idéaux premiers soient intégralement clos dans leur corps des fractions.

**Définition 7.72.** Soit  $X$  un espace rigide quasi-séparé réduit sur  $K$ . On dit que  $X$  est *normal* s'il existe un recouvrement admissible par des espaces rigides affines normaux.



On passe maintenant aux schémas formelles idylliques.

**Proposition 7.73.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique rig-pur sur  $R$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Tout point de  $\mathfrak{X}$  admet un voisinage affine qui est le spectre formel d'un anneau normal.*
- (ii) *Pour tout ouvert connexe  $U \subset \mathfrak{X}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$  est intégralement clos dans son corps des fractions.*
- (iii) *Pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  le germe  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$  est intégralement clos dans son corps des fractions.*

*Démonstration.* Tout repose sur le fait que pour tout ouvert  $U \subset \mathfrak{X}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$  est excellent. Ainsi pour tout  $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)[\frac{1}{f}]$  est excellent et donc s'il est normal son complété l'est. En plus de la remarque [7.8](#) l'équivalence se déduit facilement.  $\square$

**Définition 7.74.** On dit qu'un schéma formel idyllique  $\mathfrak{X}$  sur  $R$  est *normal* si les conditions équivalentes de la proposition précédente sont satisfaites.

On veut maintenant définir le normalisé dans la fibre générique. On commence par le cas affine : Soit  $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$  un schéma formel idyllique réduit sur  $R$ . L'algèbre  $K$ -affinoïde  $(A \hat{\otimes} K)$  est muni d'une norme de Gauss et on définit la  $R$ -algèbre  $\tilde{A} = (A \hat{\otimes} K)^\circ = \{f \in A \hat{\otimes} K \mid \|f\| \geq 1\}$ , que l'on a déjà rencontrée. Alors  $\tilde{A}$  est intégralement clos et par le théorème de Grauert-Remmert c'est une  $A$ -algèbre fini. En particulier  $\tilde{A}$  est idyllique et on a un morphisme fini

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \mathrm{Spf}(\tilde{A}) \rightarrow \mathfrak{X}.$$

On étend facilement cette construction :

**Proposition 7.75.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel idyllique réduit sur  $R$  tel que  $\mathfrak{X}^{rig}$  est normal. Alors il existe un schéma formel idyllique normal  $\tilde{\mathfrak{X}}$  sur  $R$  et un morphisme fini*

$$\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X},$$

le morphisme de normalisation.

## 8. L'ESPACE DE DRINFELD

Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $O_K$  son anneau des entiers et  $\kappa$  son corps résiduel. Soit  $f$  le degré résiduel  $K$ . On fixe une uniformisante  $\pi \in O_K$ .

Soit  $D$  une algèbre centrale simple sur  $K$  d'invariant  $1/d$ , avec  $d \geq 2$ . Soit  $O_D$  un ordre maximal de  $D$ . Alors  $O_D = O_d[\Pi]$  avec  $O_d$  l'anneau des entiers de l'extension non-ramifiée de  $K$  de degré  $d$  et  $\Pi \in O_D$  une uniformisante. On note  $\mathbb{F} = O_D/\Pi O_D$ . On considère toujours les caractères multiplicatifs de  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{F}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^\times, \mu_{q^d-1}(\bar{\mathbb{Q}}))$ ,  $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F}^\vee$ , les caractères additifs et  $\mathbb{F}_\kappa^+ \subset \mathbb{F}^+$  les caractères additifs  $\kappa$ -linéaires. On note de plus  $r = fd$ , le cardinal de  $\mathbb{F}$ , comme précédemment.

On note  $\check{K}$  la complétion de l'extension maximale non-ramifiée de  $K$  et  $O_{\check{K}}$  son anneau des entiers. Le corps résiduel de  $\check{K}$  est  $\bar{\kappa}$ . Notons que  $\pi$  est aussi une uniformisante de  $O_{\check{K}}$ . On note  $\sigma \in \mathrm{Gal}(\check{K}/K)$  le Frobenius relatif.

On considère  $(\mathbf{Nilp}/O_{\check{K}})$  la catégorie des  $O_{\check{K}}$ -algèbres où  $\pi$  est nilpotent. On dira par abus qu'un objet de  $(\mathbf{Nilp}/O_{\check{K}})$  est une  $O_{\check{K}}$ -algèbres nilpotente. Pour  $T \in (\mathbf{Nilp}/O_{\check{K}})$  on note  $\bar{T} = T/\pi T$ . Soit de plus  $\mathbf{X}$  un  $O_D$ -module formel spécial fixé sur  $\bar{\kappa}$ .

### 8.1. L'espace des modules de Drinfeld.

8.1.1. Soit  $S$  un objet de  $(\mathbf{Nilp}/O_{\check{K}})$ . Rappelons qu'un  $O_D$ -module  $p$ -divisible  $X$  sur  $S$  est un groupe  $p$ -divisible sur  $S$  muni d'une action de  $O_D$ ,

$$\iota: O_D \rightarrow \mathrm{End}(X).$$

En particulier  $X$  est un  $O_K$ -module. On dira que  $X$  est un  $O_D$ -module  $p$ -divisible *strict* si l'action de  $O_K$  sur le  $S$ -module  $\mathrm{Lie}(X)$  est donnée par sa structure usuelle de  $S$ -module, i.e.  $\iota$  se factorise par le morphisme de structure  $O_K \rightarrow S$ .

Soit  $X$  un  $O_D$ -module  $p$ -divisible strict. Alors on a une  $\mathbb{F}^+$ -graduation de l'algèbre de Lie de  $X$  donnée par

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+} \mathrm{Lie}(X)_\chi \text{ avec } \mathrm{Lie}(X)_\chi = \{v \in \mathrm{Lie}(X) \mid d\iota(a)(v) = \chi(a)v, \forall a \in O_d\}, \quad (8.1)$$

Notons que nous faisons le choix de signe opposé à [Wan14]. On dit que  $X$  est un  $O_D$ -module formel spécial si  $\mathrm{Lie}(X)$  est un  $O_D \otimes_{O_K} O_{K'}$ -module libre de rang 1. Ceci est équivalent à ce que pour tout  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$ , le  $S$ -module  $\mathrm{Lie}(X)_\chi$  est libre de rang 1.

L'endomorphisme  $\iota(\Pi)$  induit un endomorphisme de  $\mathrm{Lie}(X)$  de degré 1 pour cette graduation, c'est-à-dire que pour tout  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$  on a par restriction de  $d\iota(\Pi)$  aux différentes composantes un morphisme  $\mathrm{Lie}(X)_\chi \rightarrow \mathrm{Lie}(X)_{\chi^q}$ . On notera cette restriction  $\Pi_\chi$ . On dit que  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$  est un *indice critique* si l'endomorphisme  $\Pi_\chi: \mathrm{Lie}(X)_\chi \rightarrow \mathrm{Lie}(X)_{\chi^q}$  est nul (cf. [BC91]). Supposons que  $\pi S = 0$  alors, comme l'action est stricte,

$$\Pi_\chi \circ \Pi_{\chi^q} \circ \cdots \circ \Pi_{\chi^{q^{d-1}}} = \pi = 0$$

sur  $\mathrm{Lie}(X)_\chi$ . Ainsi si  $\pi S = 0$ , il existe au moins un indice critique.

8.1.2. On considère l'espace des modules de Drinfeld  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$ . Rappelons sa définition d'après [RZ96, Chap.3]. Le schéma formel  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$  sur  $\mathrm{Spf} O_{\bar{K}}$  représente le foncteur  $(\mathbf{Nilp}/O_{\bar{K}}) \rightarrow \mathbf{Sets}$  covariant défini par

$$T \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} X \text{ un } O_D\text{-module } p\text{-divisible spécial sur } T, \\ (X, \rho) \mid \rho: \mathbf{X} \times_{\mathrm{Spec} \bar{k}} \bar{T} \rightarrow X \times_T \bar{T} \\ \text{une } O_D\text{-quasi-isogénie de hauteur } 0 \end{array} \right\}.$$

C'est un schéma formel localement formellement de type fini. On verra qu'il est idyllique.

Soit  $\mathfrak{X}$  le  $O_D$ -module formel spécial universel sur  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$ . De même que [8.1] on a une  $\mathbb{F}_\kappa^+$ -graduation de  $\mathrm{Lie} \mathfrak{X}$ ,

$$\mathrm{Lie}(\mathfrak{X}) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+} \mathrm{Lie}(\mathfrak{X})_\chi,$$

où les  $\mathrm{Lie}(\mathfrak{X})_\chi$  sont des faisceaux inversibles sur  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$ .

8.1.3. On introduit  $\hat{\Omega}_K$  le schéma formel de Deligne sur  $\mathrm{Spf} O_K$ . On note  $\mathcal{BT}_d$  l'immeuble de Bruhat-Tits. C'est un complexe symplial dont les 0-simplexes sont indexés par les classes d'homothétie de  $O_K$ -réseaux de  $K^d$ . Décrivons les autres simplexes. Soit  $\Lambda \subset K^d$  un  $O_K$ -réseau, on note  $\bar{\Lambda}$  sa classe d'homothétie. Pour  $m$  un entier tel que  $1 \geq m \geq d$ , un  $m$ -simplex de  $\mathcal{BT}_d$  est un ensemble de 0-simplexes,  $\Delta = \{\bar{\Lambda}_{i_0}, \dots, \bar{\Lambda}_{i_m}\}$ , où  $i_1, \dots, i_m$  est une suite croissante d'entiers de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  et telle qu'il existe pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  un représentant  $\Lambda_{i_j} \in \bar{\Lambda}_{i_j}$  tel que

$$\pi \Lambda_{i_m} \subsetneq \Lambda_{i_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \Lambda_{i_m}.$$

Pour tout simplexe  $\Delta$  et toute classe d'homothétie  $\bar{\Lambda} \in \Delta$  on fixe un représentant  $\Lambda \in \bar{\Lambda}$  tel que la condition précédente soit satisfaite.

Soit  $\Delta = \{\bar{\Lambda}_{i_0}, \dots, \bar{\Lambda}_{i_m}\} \in \mathcal{BT}_d$  un  $m$ -simplex. On pose  $C_\Delta = \{i_0, \dots, i_m\}$ , l'ensemble des indices de  $\Delta$ . On définit un foncteur

$$F_\Delta: (\mathbf{Nilp}/O_K) \rightarrow (\mathbf{Sets}),$$

de la façon suivante : Pour toute  $O_K$ -algèbre nilpotente  $S$ ,  $F_\Delta(S)$  est la classe d'isomorphisme des diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{i_0} & \hookrightarrow & \Lambda_{i_1} & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \Lambda_{i_m} & \xrightarrow{\pi} & \Lambda_{i_0} \\ \downarrow \varphi_{i_0} & & \downarrow \varphi_{i_1} & & & & \downarrow \varphi_{i_m} & & \downarrow \varphi_{i_0} \\ L_{i_0} & \longrightarrow & L_{i_1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & L_{i_m} & \longrightarrow & L_{i_0}, \end{array} \quad (8.2)$$

tel que :

- $L_{i_0}, L_{i_1}, \dots, L_{i_m}$  sont des  $\mathcal{O}_S$ -modules inversibles,
- les flèches horizontales du bas sont des morphismes de  $\mathcal{O}_S$ -modules,
- $\varphi_{i_0}, \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$  sont des morphismes de  $O_K$ -modules,

- pour tout  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$  et tout  $n \in \Lambda_{i_k} - \Lambda_{i_{k-1}}$ , la section  $\varphi_{i_k}(n)$  ne s'annule nulle part sur  $\text{Spec } S$ .

Ce foncteur est représentable par un schéma formel  $\hat{\Omega}_\Delta$  sur  $O_K$  (cf. [BC91, Chap. 1], [RZ96, 3.69]). Ce dernier est même affine,  $\hat{\Omega}_\Delta = \text{Spf}(A_\Delta)$  où  $A_\Delta$  est le localisé complété pour une partie multiplicative, correspondant à la dernière condition sur le diagramme [8.2] de

$$O_K\{x_1, \dots, x_d\}\{x_j^{-1}\}_{j \notin C_\Delta} / \langle \prod_{i \in C_\Delta} x_i - \pi \rangle.$$

Le schéma formel affine  $\hat{\Omega}_\Delta$  est muni des  $\mathcal{O}_{\hat{\Omega}_\Delta}$ -modules inversibles universels  $\mathcal{L}_{i_0}, \mathcal{L}_{i_1}, \dots, \mathcal{L}_{i_m}$ . Pour tout  $i \in C_\Delta$ , on a  $\Gamma(\hat{\Omega}_\Delta, \mathcal{L}_i^* \hat{\otimes} \mathcal{L}_{i+1}) = \langle x_i \rangle$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$  et  $\Delta' = \Delta - \{\bar{\Lambda}_{i_k}\}$ . On a une immersion ouverte  $\hat{\Omega}_{\Delta'} \rightarrow \hat{\Omega}_\Delta$  obtenue en inversant  $X_{i_k}$ . En termes de foncteurs,  $F_{\Delta'}$  s'identifie au sous-foncteur ouvert défini par la condition supplémentaire sur le diagramme [8.2] " $L_{i_k} \rightarrow L_{i_{k+1}}$  est un isomorphisme". Ainsi on a défini un système inductif sur  $\mathcal{BT}_d$  dont les morphismes de transitions sont des immersions ouvertes. De plus,  $\mathcal{L}_{i_k}$  restreint à  $\hat{\Omega}_{\Delta'}$  est  $\mathcal{L}_{i_{k+1}}$ . La limite

$$\hat{\Omega}_{O_K} = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{BT}_d} \hat{\Omega}_\Delta,$$

est le schéma formel de Deligne. Les  $\mathcal{O}_{\hat{\Omega}_\Delta}$ -modules inversibles universels se recollent et définissent des  $\mathcal{O}_{\hat{\Omega}_{O_K}}$ -modules inversibles  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d$  et des morphismes  $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_{i+1}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . On a directement la proposition suivante :

**Proposition 8.1.** *Le schéma formel de Deligne est un schéma formel idyllique et lisse sur  $O_K$ . En particulier, tous ses anneaux locaux sont réduits et réguliers. De plus, il est séparé et connexe.*

Le théorème important (mais difficile), dû à Drinfeld (cf. [Dri76]) et expliqué par Boutot et Carayol pour  $d = 2$  (cf. [BC91]), est le suivant :

**Théorème 8.2** (Drinfeld). *On a un isomorphisme entre  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  et  $\hat{\Omega}_K \hat{\otimes} \check{K}$ . En particulier  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  est connexe, régulier et réduit.*

On notera  $\hat{\Omega}_{O_{\check{K}}} = \hat{\Omega}_K \hat{\otimes} \check{K}$ . L'isomorphisme dépend du choix d'un caractère  $\chi_1 \in \mathbb{F}_\kappa^+$ . Par cet isomorphisme le  $\mathcal{O}_{\hat{\Omega}_{O_{\check{K}}}}$ -module inversibles  $\mathcal{L}_k$  pour  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$  s'identifie à  $\text{Lie}(\mathfrak{X})_{\chi_1^k}$  et le morphisme universel  $\mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{L}_{k+1}$  s'identifie à  $\Pi_k: \text{Lie}(\mathfrak{X})_{\chi_1^k} \rightarrow \text{Lie}(\mathfrak{X})_{\chi_1^{k+1}}$ .

8.1.4. On peut considérer la fibre générique  $(\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}}$ , c'est un espace rigide quasi-séparé. On a un recouvrement admissible explicite grâce au théorème [8.2] :

$$(\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}} \cong \bigcup_{\Delta \in \mathcal{BT}_d} \left( \hat{\Omega}_\Delta \otimes O_{\check{K}} \right)^{\text{rig}}.$$

Soit  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Dr}}$  le  $O_D$ -module formel spécial universel. Soit  $\mathfrak{X}[\Pi] = \ker(\Pi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X})$  les  $\Pi$ -point de torsion. Alors  $\mathfrak{X}[\Pi] \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Dr}}$  est un morphisme fini. On obtient un morphisme

$$\mathfrak{X}[\Pi]^{\text{rig}} \rightarrow (\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}},$$

qui est aussi fini. Ce morphisme est étale (cf. [BC91, Chap. II, 13]), on donne un argument direct.

**Lemme 8.3.** *Soit  $G \rightarrow X$  un morphisme fini d'espaces rigides quasi-séparés. Supposons que  $G$  est un objet en groupes de  $(\mathbf{Rig}/K)_{\text{qs}}$ , alors le morphisme est étale.*

*Démonstration.* On peut supposer que  $X$  est affine,  $X = \text{Spm}(A)$  avec  $A$  une algèbre  $K$ -affinoïde. Alors  $G = \text{Spm}(A')$  où  $A'$  est une  $A$ -algèbre finie. Comme  $G$  est un objet en groupes fini on en déduit que  $A'$  est une  $A$ -algèbre de Hopf finie. Or  $A$  est de caractéristique 0 et donc  $A'$  est étale sur  $A$ , d'où la proposition.  $\square$

On a un morphisme défini par la section unité  $e: \mathcal{M}_{\text{Dr}} \rightarrow \mathfrak{X}[\Pi]$  qui est une immersion fermée. On obtient une immersion fermée

$$e^{\text{rig}}: (\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{X}[\Pi]^{\text{rig}}.$$

**Définition 8.4.** On définit la fibre générique du premier revêtement de Drinfeld  $\Sigma^1 \rightarrow (\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}}$  par :

$$\Sigma^1 = \mathfrak{X}[\Pi]^{\text{rig}} - e^{\text{rig}}[(\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}}].$$

Le nom "revêtement" est justifié car le morphisme  $\Sigma^1 \rightarrow (\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}}$  est un revêtement étale. Le but de la suite est de trouver un modèle formel explicite de  $\Sigma^1$  par une description modulaire.

## 8.2. Le revêtement modérément ramifié de l'espace des modules de Drinfeld.

8.2.1. Soit  $S$  une  $O_{\bar{K}}$ -algèbre nilpotente fixée.

**Lemme 8.5.** Soit  $X$  un  $O_D$ -module formel spécial sur  $S$ . Alors  $X$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels. En particulier  $\mathfrak{X}[\Pi]$  est un schéma en  $\mathbb{F}$ -vectoriels sur  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$ .

*Démonstration.* On traite le cas universel. On considère la structure de  $O_D$ -module de  $\mathfrak{X}$  donnée par  $\iota: O_D \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X})$ . Elle se factorise en  $\bar{\iota}: \mathbb{F} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X}[\Pi])$ , ce qui munit  $\mathfrak{X}[\Pi]$  d'une structure de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$ -schéma formel en  $\mathbb{F}$ -modules. De plus  $\mathfrak{X}[\Pi]$  est localement libre de rang  $q^d$  et donc est bien fini, plat et de présentation finie.  $\square$

**Proposition 8.6.** Soit  $X$  un  $O_D$ -module formel spécial sur  $S$ . Alors  $X[\Pi]$  est un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud. En particulier  $\mathfrak{X}[\Pi]$  est un  $\mathbb{F}$ -schéma de Raynaud sur  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$ .

*Démonstration.* Comme il suffit de vérifier les conditions d'être spécial et de Raynaud sur les points géométriques la proposition découle immédiatement du corollaire 4.8.  $\square$

Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal d'augmentation de  $\mathfrak{X}[\Pi]$ , de même que dans le paragraphe 6.1 on obtient la décomposition

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \mathcal{I}_\chi. \quad (8.3)$$

Pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ ,  $\mathcal{I}_\chi$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\text{Dr}}}$ -module inversible. Rappelons qu'on a une graduation de l'algèbre de Lie de  $\mathfrak{X}$  est donnée par

$$\text{Lie}(\mathfrak{X}) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+} \text{Lie}(\mathfrak{X})_\chi.$$

Par définition, l'endomorphisme  $\Pi$  induit un morphisme de degré 1 pour cette décomposition. Ceci induit une décomposition similaire de  $\text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi])$  de la forme

$$\text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi]) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+} \text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi])_\chi \text{ avec } \text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi])_\chi = \ker(\Pi_\chi: \text{Lie}(\mathfrak{X})_\chi \rightarrow \text{Lie}(\mathfrak{X})_{\chi^q}). \quad (8.4)$$

D'autre part le dual de l'algèbre de Lie s'identifie à  $\omega_{\mathfrak{X}[\Pi]/\mathcal{M}_{\text{Dr}}} \cong \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ . Celui-ci admet une décomposition en tant que  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\text{Dr}}}$ -module,

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \bar{\mathcal{I}}_\chi \text{ avec } \bar{\mathcal{I}}_\chi = \{x \in \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \mid \forall v \in \text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi]), \forall \lambda \in \mathbb{F}, x(d\bar{\iota}(\lambda)(v)) = \chi(\lambda)x(v)\}.$$

En d'autres termes  $\bar{\mathcal{I}}_\chi$  pour  $\chi \in \mathbb{F}^\vee$  est l'image de  $\mathcal{I}_\chi$  par l'application canonique  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ . En comparant les deux décompositions on en déduit qu'elles sont duales l'une de l'autre. Le lemme suivant a déjà été observé par H.Wang (cf. [Wan14, Lem.2.3.5]).

**Lemme 8.7.** On a  $\text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi])_\chi^* = \bar{\mathcal{I}}_\chi$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$  et  $\bar{\mathcal{I}}_\chi = 0$  pour tout  $\chi \in \mathbb{F}^\vee \setminus \mathbb{F}_\kappa^+$ .

Ceci résulte de la functorialité de toutes les constructions et de la condition "stricte". Voir aussi le paragraphe 2.2.5. Ce lemme nous permet de donner des équations locales à inversibles près de  $\mathfrak{X}[\Pi]$ .

**Proposition 8.8.** Soit  $\chi_1 \in \mathbb{F}_\kappa^+$  un caractère fixé, soit  $\Delta \in \mathcal{BT}_d$  un simplexe fixé. Par le théorème 8.2 on peut considérer la restriction de  $\mathfrak{X}[\Pi]$  à  $\hat{\Omega}_\Delta$ . Alors, pour tout  $i \in [1, d]$  il existe une section inversible  $u_i \in \Gamma(\hat{\Omega}_\Delta, \mathcal{O})$  telle que

$$\mathfrak{X}[\Pi]|_{\hat{\Omega}_\Delta} \cong \text{Spf} \left( \frac{A_\Delta[z_1, \dots, z_d]}{\langle z_i^q - u_i x_i z_i \rangle_{i=1, \dots, r}} \right).$$

*Démonstration.* D'après la proposition 8.6,  $\mathfrak{X}[\Pi]_{|\hat{\Omega}_\Delta} = \mathfrak{X}[\Pi]_\Delta \rightarrow \hat{\Omega}_\Delta$  est un schéma de Raynaud. Or  $\hat{\Omega}_\Delta$  est affine et comme le morphisme est fini,  $\mathfrak{X}[\Pi]_\Delta$  est affine. Ainsi, d'après le corollaire 6.6 il existe pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\delta_i \in A_\Delta$  tel que

$$\mathfrak{X}[\Pi]_\Delta \cong \mathrm{Spf} \left( \frac{A_\Delta[z_1, \dots, z_r]}{\langle z_i^p - \delta_i z_i \rangle_{i=1, \dots, r}} \right).$$

Alors,  $\omega_{\mathfrak{X}[\Pi]_\Delta / \hat{\Omega}_\Delta}$  correspond au  $A_\Delta$ -module gradué

$$\bigoplus_{i=1}^r A_\Delta / \langle \delta_i \rangle,$$

en restreignant la décomposition 8.3 à  $\hat{\Omega}_\Delta$ . De plus, d'après ce qui suit le théorème 8.2, pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  l'endomorphisme  $\Pi_k: \mathrm{Lie}(\mathfrak{X})_{\chi_1^k} \rightarrow \mathrm{Lie}(\mathfrak{X})_{\chi_1^{k+1}}$  est déterminé par  $x_k \in A_\Delta$ . Donc  $\mathrm{Lie}(X[\Pi])^*$  est isomorphe au  $A_\Delta$ -module gradué

$$\bigoplus_{i=1}^d A_\Delta / \langle x_i \rangle,$$

en restreignant la décomposition 8.4 à  $\hat{\Omega}_\Delta$ . Ainsi, d'après le lemme 8.7, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $A_\Delta / \langle \delta_{fi} \rangle \cong A_\Delta / \langle x_i \rangle$  et  $\delta_j$  pour  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$  est inversible si  $f$  ne divise pas  $j$ . Soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , alors  $x_i$  n'est pas un diviseur de 0  $\in A_\Delta$ . Donc il existe un inversible  $u'_i \in A_\Delta$  tel que  $\delta_{fi} = u'_i x_i$ . En réduisant les relations obtenues on obtient bien la forme voulue.  $\square$

8.2.2. On conserve les notations de la section précédente. On définit maintenant la *revêtement modéré de l'espace de Drinfeld*  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1$  à partir des générateurs  $\mathcal{G}^\times$ . Le schéma formel  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1$  sur  $\mathrm{Spf} O_{\bar{K}}$  est défini comme représentant le foncteur

$$\begin{aligned} (\mathbf{Nilp} / O_{\bar{K}}) &\rightarrow \mathbf{Sets} \\ T &\longmapsto \left\{ (X, \rho, s) \mid \begin{array}{l} (X, \rho) \in \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}(T), \\ s \in X[\Pi]^\times(T) \text{ une section génératrice} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

On notera  $\pi: \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$  le morphisme obtenu en oubliant la section génératrice. Notons que  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1 \cong \mathfrak{X}[\Pi]^\times$ , ce qui montre que  $\pi: \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$  est fini et plat de degré  $q^d - 1$  à partir de (corollaire 5.2 a)). D'après la proposition 8.8 on a directement

**Proposition 8.9.** *Soit  $\chi_1 \in \mathbb{F}_{\bar{k}}^+$  un caractère fixé,  $\Delta \in \mathcal{BT}_d$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  il existe une section inversible  $u_i \in \Gamma(\hat{\Omega}_\Delta, \mathcal{O})$  telle que*

$$\hat{\Omega}_\Delta^1 = \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1|_{\hat{\Omega}_\Delta} \cong \mathrm{Spf}(A_\Delta^1), \text{ où } A_\Delta^1 = \frac{A_\Delta[z_1, \dots, z_r]}{\langle (z_i^q - u_i x_i z_i)_{i=1, \dots, r}, (z_1 \cdots z_r)^{q-1} - u_1 \cdots u_r \pi \rangle}.$$

$\square$

On définit habituellement  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1$  comme le normalisé de  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$  dans sa fibre générique.

### Théorème 8.10.

a) La fibre générique de  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1$  est  $\Sigma^1$ .

b) Le morphisme  $\pi \otimes \bar{k}: \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}^1 \otimes \bar{k} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}} \otimes \bar{k}$  est un homéomorphisme universel.

*Démonstration.* On commence par la fibre générique. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}[\Pi]^\times & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathfrak{X}[\Pi] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}. \end{array} \quad (8.5)$$

On restreint ce diagramme à un ouvert affine  $U = \mathrm{Spf}(A)$  de  $\mathcal{M}_{\mathrm{Dr}}$ . Comme tous les morphismes sont finis on obtient un diagramme de schémas affines. Ce dernier nous donne un diagramme

d'algèbres idylliques sur  $O_{\check{K}}$  :

$$\begin{array}{ccc} A^\times & & \\ \uparrow & \swarrow & \\ A' & \longleftarrow & A, \end{array} \quad (8.6)$$

où  $A'$  est une  $A$ -algèbre de Hopf fini et  $A^\times$  est l'algèbre des sections non-nulles. On applique le foncteur  $\cdot \hat{\otimes} \check{K}$  et on obtient un diagramme d'algèbres  $\check{K}$ -affinoïdes :

$$\begin{array}{ccc} B^\times & & \\ \uparrow & \swarrow & \\ B' & \longleftarrow & B, \end{array} \quad (8.7)$$

où la flèche du bas est étale d'après le lemme 8.3. Or, former les sections non-nulles est invariant par changement de base d'après (a) de la proposition 5.4. Ainsi d'après (f) de la proposition 5.4  $B' = B^\times \amalg B$ . On a montré que

$$(\mathfrak{X}[\Pi])^{\text{rig}} = (\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1)^{\text{rig}} \amalg e^{\text{rig}}[(\mathcal{M}_{\text{Dr}})^{\text{rig}}].$$

Donc  $(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1)^{\text{rig}} \cong \Sigma^1$ .

On passe à la fibre spéciale. On sait que  $\pi$  est nul sur  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^0 \otimes \bar{\kappa}$ . On a vu qu'un  $O_D$ -module formel spécial sur une base telle que  $\pi = 0$  possède un indice critique. Or  $\mathfrak{X}[\pi]^\times \otimes \bar{\kappa} = (\mathfrak{X}[\pi] \otimes \bar{\kappa})^\times$ , Donc d'après la proposition 8.8 et b) du lemme 6.11  $\mathfrak{X}[\pi]^\times \otimes \bar{\kappa} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Dr}} \otimes \bar{\kappa}$  est radiciel.  $\square$

Ainsi la fibre générique de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est bien la fibre générique du premier revêtement de Drinfeld. On montre maintenant que  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est bien le revêtement non-ramifié de l'espace de Drinfeld défini usuellement par normalisation.

**Théorème 8.11.** *Le schéma formel  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est Cohen-Macaulay et normal. En particulier  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est la normalisation de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  dans  $\Sigma^1$ .*

*Démonstration.* On sait que  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  est régulier. Comme  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est fini et plat sur  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$ , il est Cohen-Macaulay d'après [Gro65, 6.3.5]. Localement pour  $\chi_1 \in \mathbb{F}_\kappa^+$  et  $\Delta \in \mathcal{BT}_d$  fixé, par la proposition 8.9, on voit que  $(x_i)_{i \in C_\Delta}$  est une suite régulière d'éléments de  $A_\Delta^1$ , qui est de dimension de Krull  $\text{Card}(C_\Delta)$ .

Soit  $x \in \mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$ , il suffit de montrer que  $A^1 = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1, x}$  est normal d'après la proposition 7.73. D'après le critère de Serre (cf. [Gro65, 5.8.6]), il suffit de montrer que  $A^1$  est régulier en codimension 1. D'après la description des  $\mathbb{F}$ -schémas de Raynaud libres, pour tout  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$ , il existe  $x_\chi \in A = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\text{Dr}}, \pi(x)}$  et  $u \in A$  inversible tel que :

$$A^1 \cong \frac{A[z_\chi]_{\chi \in \mathbb{F}^+}}{\langle (z_\chi^p - x_\chi z_\chi^p)_{\chi \in \mathbb{F}^+}, (\prod_{\chi \in \mathbb{F}^+} z_\chi)^{p-1} - u\pi \rangle}.$$

Soit  $\mathfrak{p} \subset A^1$  un idéal premier de hauteur au plus 1. Notons que pour tout  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$ ,  $x_\chi$  n'est pas diviseur de 0. Ainsi, il existe au plus un  $\chi \in \mathbb{F}_\kappa^+$  tel que  $x_\chi \in \mathfrak{p}$ . Donc d'après le lemme 6.11

$$A_{\mathfrak{p}}^1 \cong \frac{A_{\mathfrak{p}}[z]}{\langle z^{q^d-1} - \Delta \rangle},$$

avec  $\Delta = u \prod_{i=0}^{f-1} (x_{\chi^{p^i}})^{p^i}$ . On conclut que  $(A^1)_{\mathfrak{p}}$  est bien un anneau régulier, ce qui conclut la preuve.  $\square$

8.2.3. Dans ce paragraphe, on décrit le lieu singulier de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$ .

**Définition 8.12.** On définit  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{pc}}$ , le lieu pluri-critique, par le sous foncteur fermé de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  des  $O_D$ -modules formels spéciaux qui possèdent au moins deux indices critiques. On définit de même  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{1, \text{pc}}$ , qui est au dessus de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{pc}}$ . Ce sont des schémas usuels.

Dans la preuve du théorème précédent on a montré le lemme suivant

**Lemme 8.13.** *Le schéma formel  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1 - \mathcal{M}_{\text{Dr}}^{1, \text{pc}}$  est régulier.*

**Proposition 8.14.** *Le schéma formel  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  n'est pas Gorenstein, plus précisément, aucun point de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{1,pc}$  n'est régulier.*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathcal{M}_{\text{Dr}}^{1,pc}$  et  $A^1 = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1, x}$ . D'après [Sta18, 45.21.3], comme  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}$  est régulier,  $A = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_{\text{Dr}}, \pi(x)}$  est Gorenstein et il suffit de montrer que l'anneau  $A^1/\mathfrak{m}_{\pi(x)}A^1$ , qui est de dimension 0, n'est pas Gorenstein par [Sta18, 45.21.8]. Soit  $C \subset \mathbb{F}_\kappa^+$  les indices critiques en  $x$ , alors quitte à changer les indices :

$$A^1/\mathfrak{m}_{\pi(x)}A^1 \cong \frac{\bar{\kappa}[z_\chi]_{\chi \in C}}{\langle (z_\chi^{q^{a_\chi}})_{\chi \in C}, \prod_{\chi \in C} z_\chi^{q^{b_\chi}} \rangle}$$

où

$$a_\chi = \inf\{i > 0 \mid \chi^{q^i} \in C\} \text{ et } b_\chi = (q-1) \sum_{k=0}^{a_\chi-1} q^k.$$

C'est un anneau homogène. Les éléments de degré maximal forment le module dualisant. Il est clair que comme  $C$  a plus de deux éléments, les éléments de degré maximal forment un  $\bar{\kappa}$ -espace vectoriel de dimension strictement supérieure à 1. En effet le module dualisant est engendré par la famille libre

$$\left\{ \frac{1}{z_\mu} \prod_{\chi \in C} z_\chi^{q^{b_\chi}} \right\}_{\mu \in C}.$$

Il n'est donc pas Gorenstein, ce qui conclut l'argument.  $\square$

Avec le dernier lemme on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 8.15.** *Le lieu singulier de  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^1$  est  $\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{1,pc}$ .*

$\square$

#### RÉFÉRENCES

- [Abb10] Ahmed Abbas. *Éléments de géométrie rigide. Volume I*, volume 286 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010. Construction et étude géométrique des espaces rigides. [Construction and geometric study of rigid spaces], With a preface by Michel Raynaud.
- [ABD<sup>+</sup>66] Michael Artin, Jean-Etienne Bertin, Michel Demazure, Alexander Grothendieck, Pierre Gabriel, Michel Raynaud, and Jean-Pierre Serre. *Schémas en groupes*. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963/1966.
- [AM16] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016. For the 1969 original see [MR0242802].
- [BC91] J.-F. Boutot and H. Carayol. Uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura : les théorèmes de čerednik et de Drinfeld. *Astérisque*, (196-197) :7, 45–158 (1992), 1991. Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988).
- [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [Bou89] Nicolas Bourbaki. *Commutative algebra. Chapters 1–7*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1989. Translated from the French, Reprint of the 1972 edition.
- [DG70] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. Avec un appendice <sup>-1</sup>t Corps de classes local par Michiel Hazewinkel.
- [Dri76] V. G. Drinfeld. Coverings of  $p$ -adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(2) :29–40, 1976.
- [FGL08] Laurent Fargues, Alain Genestier, and Vincent Lafforgue. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, volume 262 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [Fon77] Jean-Marc Fontaine. *Groupes  $p$ -divisibles sur les corps locaux*. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Astérisque, No. 47-48.
- [GD71] A. Grothendieck and J. A. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. I*, volume 166 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [Gro65] A. Grothendieck. éléments de géométrie algébrique. IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24) :231, 1965.



- [Haz12] Michiel Hazewinkel. *Formal groups and applications*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2012. Corrected reprint of the 1978 original.
- [HR12] Thomas J. Haines and Michael Rapoport. Shimura varieties with  $\Gamma_1(p)$ -level via Hecke algebra isomorphisms : the Drinfeld case. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(5) :719–785 (2013), 2012.
- [KM85] Nicholas M. Katz and Barry Mazur. *Arithmetic moduli of elliptic curves*, volume 108 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [KP17] R. Kottwitz and P. Wake. Primitive elements for  $p$ -divisible groups. *arXiv :1510.02814v2*, 2017.
- [Mes72] William Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [Mil17] J. S. Milne. *Algebraic groups*, volume 170 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017. The theory of group schemes of finite type over a field.
- [Pap95] Georgios Pappas. Arithmetic models for Hilbert modular varieties. *Compositio Math.*, 98(1) :43–76, 1995.
- [Ray74] Michel Raynaud. Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$ . *Bull. Soc. Math. France*, 102 :241–280, 1974.
- [RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for  $p$ -divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [RZ17] Michael Rapoport and Thomas Zink. On the Drinfeld moduli problem of  $p$ -divisible groups. *Camb. J. Math.*, 5(2) :229–279, 2017.
- [Sch17] Peter Schneider. *Galois representations and  $(\varphi, \Gamma)$ -modules*, volume 164 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [SGA72a] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [SGA72b] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [Tat67] J. T. Tate.  $p$ -divisible groups. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer, Berlin, 1967.
- [TO70] John Tate and Frans Oort. Group schemes of prime order. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :1–21, 1970.
- [Wan14] Haoran Wang. L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale I. *Math. Z.*, 278(3-4) :829–857, 2014.