# NOTES SUR LE THÉORÈME DE DRINFELD

ARNAUD VANHAECKE

Ces notes sont issues d'une série de trois exposés au CMLS à Polytechnique, en mars-avril 2019 dans le cadre d'un groupe de travail sur l'espace de Drinfeld. Elles présentent essentiellement le théorème de Drinfeld (cf. [Dri76]). La première partie traite du problème de modules de Drinfeld et la seconde de l'isomorphisme avec l'espace symétrique. Toute imprécision/erreur/maladresse est entièrement ma faute et ces notes sont à utiliser au péril du lecteur. Tout commentaire est amplement bienvenu !

On fixe quelques notations. Soit $p$ un nombre premier que l'on supposera impair. On fixe $K$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré $n$ et on note $O_K$ son anneau des entiers. On fixe une uniformisante $\pi \in O_K$. On note $\breve{K}$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de $K$ ; de même, $O_{\breve{K}}$ désignera son anneau des entiers. On notera simplement $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de $K$ où $q = p^f$ est son cardinal. Le corps résiduel de $\breve{K}$ est algébriquement clos, on le notera simplement $\bar{\mathbb{F}}_p$. On notera $(\mathbf{Nilp}\,/O_{\breve{K}})$ la catégorie des $O_{\breve{K}}$-algèbres où $p$ est localement nilpotent. En général, $R$ désignera un objet de cette catégorie.

## 1. $O_D$-modules formels spéciaux

### 1.1. Définitions et premières propriétés.

1.1.1. *Algèbres à division centrales simples.* Soit $d \geqslant 1$ un entier. On pose $D$ l'algèbre à division centrale d'invariant $1/d$. On explique brièvement ce que cela signifie.

On note $K'$ l'unique extension non-ramifié de degré $d$ de $K$. Elle correspond à l'unique extension de degré $d$, $\mathbb{F}_{q^d}$, du corps fini $\mathbb{F}_q$. On note $O_{K'}$ l'anneau des entiers de $K'$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K'/K)$ est cyclique d'ordre $d$. On fixe un générateur $\sigma$, qui est un relèvement de l'automorphisme $x \mapsto x^q$ sur le corps résiduel de $K'$.

On définit maintenant $D$ comme l'algèbre non-commutative engendrée par $K'$ et un générateur $\Pi \in D$ astreint aux relations

$$\Pi^d = \pi,\ \Pi a = \sigma(a)\Pi,\ \forall a \in K'.$$

*L'ordre maximal* $O_D \subset D$ est le sous-anneau engendré par $O_{K'}$ et $\Pi$. Notons que $D$ peut être obtenu comme l'anneau des endomorphismes du $\sigma$-isocristal [1] simple $V_{1/d}$, de pente $1/d$, sur $\mathbb{F}_q$.

**Remarque 1.1.** Notons que la théorie du corps de classes local nous donne un isomorphisme $\mathrm{Br}(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, où $\mathrm{Br}(K)$ est le *groupe de Brauer* de $K$. Il est en bijection avec les algèbres à division centrales sur $K$. Ainsi, à toute fraction $r/s$ correspond une algèbre à division centrale sur $K$, qui est de plus l'anneau des endomorphismes du $\sigma$-isocristal simple $V_{r/s}$ de pente $r/s$. La théorie que l'on va développer dans ce qui va suivre ne fonctionne que pour des fractions de la forme $1/d$...

1.1.2. *Modules p-divisibles.* On suppose le lecteur familier avec les groupes $p$-divisibles. Soit $R$ un objet de $(\mathbf{Nilp}\,/O_{\breve{K}})$. Si $X$ est un groupe $p$-divisible sur $R$, on note $\mathrm{End}(X)$ l'anneau des endomorphismes de $X$ : l'addition est l'addition évidente et la composition définit la multiplication. C'est bien un anneau (non-commutatif en général !) car le groupe sous-jacent à $X$ est commutatif.

**Définition 1.2.** Un *$O_K$-module p-divisible* sur $R$ est un groupe $p$-divisible $X$ sur $R$ muni d'un morphisme non-nul d'anneaux

$$\iota\colon O_K \to \mathrm{End}(X).$$

1. Cette notion apparaîtra plus tard dans ces notes (cf. 1.11). C'est une version "ramifiée" des isocristaux et ils admettent aussi une classification à la Dieudonné-Manin. Un $\sigma$-isocristal sur $\mathbb{F}_q$ est un couple $(V, \Phi)$ où $V$ est un $\breve{K}$-espace vectoriel de dimension fini et $\Phi\colon V \to V$ est un endomorphisme $\sigma$-linéaire.

Dans ces notes, un $O_K$-modules $p$-divisible sera toujours supposé *stricte* : on a deux façons de faire agir $O_K$ sur $\mathrm{Lie}(X)$.

- L'action $\iota$ induit une action de $O_K$ sur $\mathrm{Lie}(X)$.
- Comme $\mathrm{Lie}(X)$ est un $R$-module, $O_K$ agit par le morphisme structural $O_K \hookrightarrow O_{\breve{K}} \to R$.

Si ces deux actions de $O_K$ sur $\mathrm{Lie}(X)$ coïncident, on dira que $X$ est un $O_K$-module $p$-divisible *strict* ou simplement que l'action est *stricte*. On insiste que cette hypothèse sera toujours en vigueur.

**Définition 1.3.** Un *$O_D$-module $p$-divisible* sur $R$ est un groupe $p$-divisible $X$ sur $R$ muni d'un morphisme non-nul d'anneaux
$$\iota\colon O_D \to \mathrm{End}(X),$$
tel que l'action de $O_K \subset O_D$ soit stricte.

Notons que comme $O_D$ est simple, un tel morphisme est toujours injectif.

1.1.3. *$O_D$-modules formels spéciaux.* Soit $X$ un $O_D$-module $p$-divisible sur $R$ comme précédemment. On a
$$R \otimes_{O_K} O_{K'} = \prod_{\psi\colon K' \hookrightarrow \bar{K}} R_\psi. \tag{1.1}$$
Le produit dans (1.1) porte sur tous les plongements de corps $K$-linéaires de $K'$ dans une clôture algébrique de $K$ fixée. Pour un tel plongement $\psi$, on a noté $R_\psi = R \otimes_{O_{K'},\psi} O_{K'}$, qui est, en tant qu'anneau, isomorphe à $R$, mais où l'action de $O_{K'}$ est tordue. Comme l'action de $O_K$ sur $X$ est stricte, on obtient une décomposition similaire pour l'algèbre de Lie :
$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\psi\colon K' \hookrightarrow \bar{K}} \mathrm{Lie}(X)_\psi,$$
où $\mathrm{Lie}(X)_\psi$ est une $R$-algèbre. On fixe un plongement $\psi_0\colon K' \hookrightarrow \bar{K}$ et un générateur $\sigma$ de $\mathrm{Gal}(K'/K)$ ; ce dernier donne un isomorphisme $\mathrm{Gal}(K'/K) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Tous les plongements du produit (1.1) sont alors de la forme $\psi_i = \psi_0 \circ \sigma^i$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Alors
$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}(X)_i, \tag{1.2}$$
où $\mathrm{Lie}(X)_i = \mathrm{Lie}(X)_{\psi_i}$. Pour cette décomposition, $\Pi \in O_D$ induit un endomorphisme de $\mathrm{Lie}(X)$, que l'on notera toujours $\Pi$, qui est de degré $+1$. C'est-à-dire que $\Pi$ induit des morphismes
$$\Pi_i\colon \mathrm{Lie}(X)_i \to \mathrm{Lie}(X)_{i+1},\ i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},$$
Comme $\Pi^d = \pi$, on a $\Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_d = \pi$.

**Définition 1.4.** On garde les notations précédentes. On dit que $X$ est un *$O_D$-module formel spécial* si pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ la $R$-algèbre $\mathrm{Lie}(X)_i$ est inversible, i.e. est libre de rang 1 sur $R$. En d'autres termes, $\mathrm{Lie}(X)$ est une $R \otimes_{O_K} O_{K'}$-algèbre inversible. On dira que $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est un *indice critique* de $X$ si le morphisme $\Pi_i$ est nul.

**Lemme 1.5.** *Soit $X$ un $O_D$-module formel spécial sur un corps $k$ de caractérisique $p$, alors $X$ possède au moins un indice critique.*

*Démonstration.* Dans le cas présent, $\pi = 0$ dans $k$. De plus, $\Pi_i$ est soit nul, soit un isomorphisme. Comme $\Pi_1 \circ \cdots \circ \Pi_d = 0$, l'un des $\Pi_i$ est nul. □

L'appellation "formel" mérite une explication. Rappelons qu'un groupe $p$-divisible $X$ est *formel* si $X[p]$ est un schéma en groupe fini localement libre infinitésimal, i.e. les fibres géométriques sont connexes. Notons que $X[p]$ est infinitésimal si et seulement si pour tout entier $k \geqslant 1$, $X[p^k]$ est infinitésimal. Dans ce cas, $X$ correspond localement pour la topologie de Zariski à une loi de groupe formelle sur $R$.

**Lemme 1.6.** *Soit $X$ un $O_D$-module formel spécial sur $R$, comme précédemment, alors $X$ est un groupe $p$-divisible formel.*

*Démonstration.* Pour une $O_{\breve{K}}$-algèbre $R$ telle que $p$ est localement nilpotent, on raisonne fibre à fibre géométrique sur $\operatorname{Spec} R$ ; on peut donc supposer que $R = k$ soit un corps de caractéristique $p$. Soit $D(X)$ le module de Dieudonné de $X$. Alors le module de Dieudonné de $X[\Pi]$, les points de $\Pi$-torsion de $X$, est donné par $D(X[\Pi]) \cong D(X)/\Pi D(X)$. Il suffit de vérifier que $V$ est nilpotent sur $D(X[\Pi])$. Or, si $V$ n'est pas nilpotent c'est un isomorphisme. Ainsi, comme $\Pi$ et $V$ commutent, il suffit de vérifier que $\Pi$ est nilpotent sur $\mathrm{Lie}(X) = D(X)/VD(X)$. C'est le cas puisque, par le lemme précédent, $X$ possède un indice critique. □

## 1.2. **Théorie de Dieudonné-Cartier.**

1.2.1. *Vecteurs de Witt ramifiés.* On explique brièvement la construction des vecteurs de Witt ramifiés $\mathrm{W}_{O_K}$. On introduit, pour $n \geqslant 1$ un entier, le polynôme

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} \pi^i X_i^{q^{n-i}} = X_0^{q^n} + \pi X_1^{q^{n-1}} + \cdots + \pi^n \in O_K[X_0, \ldots, X_n].$$

On procède ensuite comme pour les vecteurs de Witt classiques. Soit $A$ une $O_K$-algèbre, on pose en tant qu'ensemble $\mathrm{W}_{O_K}(A) = A^{\mathbb{N}}$. On notera $[a_i]_{i\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathrm{W}_{O_K}(A)$. On a un morphisme

$$w\colon \mathrm{W}_{O_K}(A) \to A^{\mathbb{N}},\ [a_i]_{i\in\mathbb{N}} \longmapsto (w_i(a_0, \ldots, a_i))_{i\in\mathbb{N}}.$$

On a le lemme suivant :

**Lemme 1.7.** *Soit $A$ une $O_K$-algèbre. Alors on peut munir $\mathrm{W}_{O_K}(A)$ d'une structure de $O_K$-module, fonctorielle en $A$, telle que $w$ soit un morphisme de $O_K$-algèbres, où $A^{\mathbb{N}}$ est muni de la structure produit.*

□

Ainsi, on a défini un foncteur $\mathrm{W}_{O_K}$ [2], des *vecteurs de Witt ramifiés.* C'est un foncteur covariant de la catégorie des $O_K$-algèbres dans elle-même. Pour $A$ une $O_K$-algèbre, $\mathrm{W}_{O_K}(A)$ est muni des opérations standards suivantes :

- Le *relèvement de Teichmüller*, $[\cdot]\colon A \to \mathrm{W}_{O_K}(A)$, qui à $a \in A$ associe $[a, 0, 0, \ldots]$.
- Le *Frobenius*, $\sigma\colon \mathrm{W}_{O_K}(A) \to \mathrm{W}_{O_K}(A)$ défini à l'aide de $w$ par : soit $a \in \mathrm{W}_{O_K}(A)$, on note $w(a) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, alors $Fa$ est défini de sorte à ce que $w(Fa) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$.
- Le *Décalage*[3], $\tau\colon \mathrm{W}_{O_K}(A) \to \mathrm{W}_{O_K}(A)$ défini pour $a = [a_i]_{i\in\mathbb{N}}$ par $Va = [0, a_1, a_2, \ldots]$.

Ces opérations satisfont des relations classiques, comme $\sigma\tau = \pi$ ou $\tau(\sigma(x)y) = x\tau(y)$ pour tout $x, y \in \mathrm{W}_{O_K}(A)$. Plus important encore, on munit $\mathrm{W}_{O_K}(A)$ de la filtration $\tau$-adique[4]. Ceci fait de $\mathrm{W}_{O_K}(A)$ un anneau adique séparé et complet. Tout élément $a \in \mathrm{W}_{O_K}(A)$ s'écrit de manière unique

$$a = \sum_{n\geqslant 0} \tau^n[a_n].$$

Si $A$ est une $\mathbb{F}_q$-algèbre, alors $\tau\sigma = \pi$ et pour $a = [a_i]_{i\in\mathbb{N}}$ on a $\sigma a = [a_i^q]_{i\in\mathbb{N}}$. Ainsi, si $A$ est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite, tout élément $a \in \mathrm{W}_{O_K}(A)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = \sum_{n\geqslant 0} [a_n^{q^{-n}}]\pi^n,$$

et $\mathrm{W}_{O_K}(A)$ est l'unique relèvement $\pi$-adique, sans $\pi$-torsion, de $A$. Ceci nous permet de donner une comparaison avec les vecteurs de Witt classiques, que l'on laisse en exercice :

---

2. En toute rigueur, on devrait faire attention au choix de l'uniformisante $\pi$ et noter ce foncteur $\mathrm{W}_{O_K,\pi}$ ; pour une autre uniformisante $\pi'$, on obtient un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{W}_{O_K,\pi} \cong \mathrm{W}_{O_K,\pi'}$ et comme ces isomorphismes sont compatibles, on peut définir rigoureusement $\mathrm{W}_{O_K}$ comme la limite inverse des $\mathrm{W}_{O_K,\pi}$ pour ces isomorphismes de transition.

3. Comme précédemment, $\tau$ dépend du choix de l'uniformisante. Noter que ce n'est pas le cas de $\sigma$ et $[\cdot]$. On devrait donc noter le décalage $\tau_\pi$. Pour $\pi'$ une autre uniformisante, on a la relation $\tau_\pi = \frac{\pi}{\pi'}\tau_{\pi'}$.

4. Cette filtration ne dépend pas du choix de l'uniformisante !

**Lemme 1.8.** *Si $A$ est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{W}_{O_K}(A) \cong \mathrm{W}(A) \otimes_{\mathrm{W}(\mathbb{F}_q)} O_K.$$

*Par cet isomorphisme, le Frobenius $\sigma$ à gauche, correspond à $q$-fois le Frobenius à droite.*

□

1.2.2. *$O_K$-modules stricts formels.* Les vecteurs de Witt ramifiés nous permettent de développer une bonne théorie de Dieudonné pour les modules $p$-divisibles. On va s'intéresser aux $O_K$-modules formels. Soit $R$ une $O_{\breve{K}}$-algèbre telle que $p$ est localement nilpotent, on définit *l'anneau de Cartier* $\mathbb{E}_{O_K}(R)$. C'est le complété $V$-adique de l'anneau non-commutatif $\mathrm{W}_{O_K}(R)\langle F, V\rangle$, astreint aux relations

$$FV = \pi,\ Fa = \sigma(a)F,\ Va = \tau(a)V\ \forall a \in \mathrm{W}_{O_K}(R).$$

Tout élément $x \in \mathbb{E}_{O_K}(R)$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i,j\geqslant 0} V^i[x_{ij}]F^j,$$

tel que la somme soit finie en $j$. La théorie de Dieudonné-Cartier permet de traduire la donnée d'un groupe $p$-divisible en terme d'un module sur l'anneau de Cartier.

**Définition 1.9.** Un $\mathbb{E}_{O_K}(R)$-module à gauche $M$ est appelé un *module de Cartier réduit* si

- $V\colon M \to M$ est injectif,
- $M$ est séparé et complet pour la topologie $V$-adique,
- $M/VM$ est un $R$-module localement libre de rang fini.

Soit $M$ un $\mathbb{E}_{O_K}(R)$-module de Cartier réduit tel que $M/VM$ soit libre. On note $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ le relèvement dans $M$ d'une base de $M/VM$. On appelle un tel relèvement une *$V$-base* de $M$. D'après les hypothèse, tout $v \in M$ s'écrit de façon unique comme une somme

$$v = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i\geqslant 0} V^i[v_{ik}]\gamma_k.$$

Ainsi l'action de $F$ est déterminée par son action sur les $\gamma_j$, ce qui détermine une présentation du module $M$. On énonce le théorème principal de ce paragraphe, qui est une traduction du théorème de Cartier-Dieudonné.

**Théorème 1.10.** *La catégorie des $O_K$-modules stricts formels sur $R$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{E}_{O_K}(R)$-modules de Cartier réduits. On notera ce foncteur $X \rightsquigarrow M_{O_K}(X)$.*

□

Le point central pour déduire le théorème du cas standard où $K = \mathbb{Q}_p$ est le fait que $M_{\mathbb{Z}_p}(X)$ est un $O_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{W}(R)$-module libre. Or, pour $K_0 \subset K$ la sous-extension maximale non-ramifiée on a

$$M_{\mathbb{Z}_p}(X) \otimes_{\mathrm{W}(R)} \mathrm{W}_{O_K}(R) = \bigoplus_{\psi\colon K_0 \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p} M_{O_K}(X)_\psi,$$

la somme directe portant sur les plongements $\psi\colon K_0 \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$. La condition stricte implique alors que les termes de cette décomposition sont bien les $M_{O_K}(X)_\psi = M_{O_K}(X) \otimes_\psi \mathrm{W}_{O_K}(R)$.

Faisons quelques remarques dans le cas où $R = k$, un corps parfait de caractéristique $p$. Soit $X$ un $O_K$-module formel sur $k$. On note $D(X)$ le module de Dieudonné covariant de $X$. Alors $D(X)[\frac{1}{p}]$ est un *isocristal* sur $k$, i.e. c'est un $W(k)[\frac{1}{p}]$-espace vectoriel muni d'un endomorphisme Frobenius linéaire [5]. On a une notion de *$\sigma$-isocristal sur $k$*. C'est un espace vectoriel sur $W_{O_K}(k)[\frac{1}{p}]$ muni d'un endomorphisme $\sigma$-linéaire. D'après la théorie de Cartier, $M_{\mathbb{Z}_p}(X)$ est le complété $V$-adique de $D(X)$. Alors $M_{O_K}(X)[\frac{1}{p}]$ muni de $F$ est un $\sigma$-isocristal sur $k$. On obtient le corollaire suivant du théorème 1.10 :

**Corollaire 1.11.** *La catégorie des $O_K$-modules stricts formels sur $k$, à isogénie près, est équivalente à la catégorie des $\sigma$-isocristaux par le foncteur $X \rightsquigarrow (M_{O_K}(X)[\frac{1}{p}], F)$.*

Ceci nous permet d'utiliser une classification à la Dieudonné-Manin.

5. Le Frobenius en question ici est celui des vecteurs de Witt classique, induit par $x \to x^p$ sur le corps résiduel.

1.2.3. *Classification des $O_D$-modules formels spéciaux.* On étend la classification précédente (cf. théorème 1.10) aux $O_D$-modules formels spéciaux. Soit $R$ une $O_{\breve{K}}$-algèbre telle que $p$ soit nilpotent. Soit $X$ un $O_D$-module formel spécial. Soit $M = M_{O_K}(X)$ son module de Cartier réduit. Le module $M$ est de rang $d^2$ et il est muni d'une action de $O_D$ par fonctorialité. Comme pour l'algèbre de Lie, l'action de $O_{K'}$ induit une décomposition

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_i \tag{1.3}$$

et $F, V$ et $\Pi$ induisent des endomorphismes, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$,

$$F\colon M_i \to M_{i-1},\ V\colon M_i \to M_{i+1},\ \Pi\colon M_i \to M_{i+1}. \tag{1.4}$$

Notons que comme $V$ est injectif, les $M_i$ sont tous de rang $d$. On dira que $F$ est gradué de degré $-1$ et que $V$ et $\Pi$ sont gradués de degré $+1$. Ainsi, la graduation induit une graduation sur $M/VM \cong \mathrm{Lie}(X)$. On obtient la même graduation que la graduation (1.2), i.e. pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$,

$$M_i/VM_{i-1} \cong \mathrm{Lie}(X)_i.$$

**Définition 1.12.** Un module de Cartier réduit $M$ de rang $d^2$ sur $\mathbb{E}_{O_K}(R)$ muni d'une graduation (1.3), telle que $F$ et $V$ sont respectivement gradués de degré $-1$ et $+1$, muni de plus d'un endomorphisme $\Pi$ de degré $+1$, sera appelé un *module de Cartier spécial* si pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $M_i/VM_{i-1}$ est de rang 1 sur $R$. En d'autres termes, $M$ est un $O_D \otimes_{O_K} W_{O_K}(R)$-module inversible et $M/VM$ est un $O_{K'} \otimes_{O_K} R$-module inversible.

Si on inverse $p$ dans un tel module, on obtient un $\sigma$-isocristal gradué muni d'un endomorphisme gradué de degré $+1$, on appellera un tel objet simplement un *$\sigma$-isocristal spécial.*

Ces donnés caractérisent entièrement la structure de $O_D$-module sur $X$. On obtient le théorème suivant :

**Théorème 1.13.** *La catégorie des $O_D$-modules formels spéciaux sur $R$ est équivalente à la catégorie des modules de Cartier spéciaux sur $\mathbb{E}_{O_K}(R)$ par le foncteur $X \rightsquigarrow (M_{O_K}(X), \Pi)$. Si on inverse $p$ dans le module de Cartier, on obtient une équivalence entre la catégorie des $O_D$-modules formels spéciaux, à isogénie près, et la catégorie des $\sigma$-isocristaux spéciaux.*

□

On s'intéresse pour le reste de ce paragraphe au cas où $R = k$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p$. Soit $X$ un $O_D$-module formel spécial sur $k$, dans ce cas, par le lemme 1.5 $M = M_{O_K}(X)$ possède un indice critique, i.e. il existe $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ tel que $\Pi$ restreint à $M_i/VM_{i-1}$ soit nul, i.e. $\Pi M_i \subset VM_i$. Or $M/\Pi M$ est de dimension $d$ sur $k$ et donc pour tout $j$, $M_j/\Pi M_{j-1}$ est de dimension 1 sur $k$, puisque leurs dimensions sont indépendantes de $j$[6]. Comme $\Pi M_i$ et $VM_i$ sont de même codimension dans $M$, on obtient que $i$ est critique si et seulement si $\Pi M_i = VM_i$. Le but est de montrer la proposition suivante :

**Proposition 1.14.** *Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$. Il existe, à isogénie près, un unique $O_D$-module formel spécial sur $k$.*

*Démonstration.* Soit $X$ un $O_D$-module spécial sur $k$. Soit $M$ son module de Cartier spécial. Alors $(M_0 \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi)$ est un $\sigma$-isocristal qui caractérise la classe d'isogénie de $X$. Ceci mérite plus d'explication. Le morphisme $\Pi$ induit un endomorphisme $\Pi\colon M_0 \to M_1$. Comme $\Pi^d = \pi$, après inversion de $p$ cet endomorphisme est inversible. Par définition, $V$ induit une application $M_0 \to M_1$ qui est injective et $\sigma^{-1}$-linéaire. Ainsi, après inversion de $p$, $V$ est inversible et $V^{-1}$ induit une application $M_1 \to M_0$ qui est $\sigma$-linéaire. En somme $V^{-1}\Pi$ est bien un morphisme $\sigma$-linéaire de $M_0 \otimes \mathbb{Q}_p$, qui définit donc un $\sigma$-isocristal sur $k$ de rang $d$. On a montré que l'isocristal spécial $M \otimes \mathbb{Q}_p$ caractérise la classe d'isogénie de $X$. Or on a vu que $V$ induit un isomorphisme entre les composantes de $M \otimes \mathbb{Q}_p$. De plus, $V^{-1}\Pi$ encode $\Pi$. Ainsi $(M_0 \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi)$ caractérise bien la classe d'isogénie de $X$.

Il suffit maintenant de montrer que $(M_0 \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi)$ est un $\sigma$-isocristal de hauteur $d$ et de pente 0, puisque dans ce cas, par Dieudonné-Manin, il existe un unique tel $\sigma$-isocristal. Or $X$

6. On a vu que le rang des $M_j$ est indépendant de $j$ car $V\colon M_j \to M_{j+1}$ est injectif. On peut en déduire que la dimension des $M_j/\Pi M_{j-1}$ est indépendante de $j$ à l'aide, par exemple, du lemme du serpent.

possède un indice critique $i$ et à l'aide de $\Pi$, on peut identifier $M_i$ à un sous-$\mathrm{W}_{O_K}(k)$-module de $M_0 \otimes \mathbb{Q}_p$. Par la discussion qui précède la proposition on sait que $VM_i = \Pi M_i$. Ainsi, $M_0 \otimes \mathbb{Q}_p$ possède un sous-réseau stable par $V^{-1}\Pi$ et donc il est de pente 0. Ce qui démontre la proposition. $\square$

Pour conclure, remarquons que cette classe d'isogénie est naturellement munie d'une action, par quasi-isogénies (cf. 1.15), de $\mathrm{GL}_d(K)$. En effet, $\mathrm{GL}_d(K)$ est naturellement le groupe des automorphismes de l'isocristal unité $(M_0 \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi)$ introduit dans la preuve.

## 1.3. **L'espace de modules de Drinfeld.**

1.3.1. *Quasi-isogénies.* On rappelle quelques faits standards sur les groupes $p$-divisibles. Soit $R$ un objet de $(\mathbf{Nilp}\,/O_{\breve{K}})$.

**Définition 1.15.** Soit $X$ et $Y$ deux groupes $p$-divisibles sur $R$. On dit qu'un morphisme $f\colon X \to Y$ est une *isogénie* si c'est un épimorphisme de faisceaux fppf en groupes tel que le noyau de ce morphisme soit représentable par un schéma en groupe fini et localement libre sur $R$. On note $\mathrm{Hom}(X,Y)$ le groupe abélien des isogénies entre $X$ et $Y$. La hauteur du noyau de $f$ définit la hauteur de l'isogénie, notée $\mathrm{ht}(f)$.

Une *quasi-isogénie* entre $X$ et $Y$ est une section $f$ de $\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ telle que localement pour la topologie de Zariski, $p^n f$ soit une isogénie pour un entier $n \geqslant 0$. La hauteur de $f$ est alors définie par $\mathrm{ht}(f) = \mathrm{ht}(p^n f) - \mathrm{ht}(p^n)$, i.e. de sorte à ce qu'elle reste additive. On note $\mathrm{Qisog}_R(X,Y)$ le groupe abélien des quasi-isogénies entre $X$ et $Y$.

Le théorème important sur les quasi-isogénie est le théorème de rigidité dû à Drinfeld. Moralement, le groupe $\mathrm{Qisog}_R(X,Y)$ ne dépend pas des épaississement infinitésimaux, i.e. les quasi-isogénies se relèvent canoniquement.

**Proposition 1.16.** *Soit $R \to R'$ un morphisme dont le noyau est localement nilpotent. Soit $X$ et $Y$ deux groupes $p$-divisibles sur $R$. Alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Qisog}_R(X,Y) \to \mathrm{Qisog}_{R'}(X_{R'},Y_{R'}),$$

*est bijectif. En d'autres termes, si $f\colon X \to Y$ est une quasi-isogénie, il existe une unique quasi-isogénie $f'\colon X_{R'} \to Y_{R'}$, qui relève $f$.*

$\square$

1.3.2. *Définition de l'espace.* On définit l'espace de Drinfeld. On fixe $\mathbf{X}$ un $O_D$-module formel spécial sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. Ce choix n'a pas d'importance, puisqu'on a montré qu'il y a une unique classe d'isogénie de $O_D$-module formel spécial sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On choisit $\mathbf{X}$ de sorte à ce que son module de Cartier, que l'on notera $\mathbf{M}$, soit donné par

$$\mathbf{M} = O_D \otimes_{W(\mathbb{F}_q)} \mathrm{W}(\bar{\mathbb{F}}_p),$$

pour le décalage $\mathbf{V}$ défini par $\mathbf{V}m = \sigma^{-1}(m)\Pi$ pour tout $m \in \mathbf{M}$. Ce choix sera en vigueur dans toute la suite.

On pose le foncteur suivant défini sur $(\mathbf{Nilp}\,/O_{\breve{K}})$ :

$$R \longmapsto \left\{ (X,\rho) \;\middle|\; \begin{array}{c} X \text{ un } O_D\text{-module formel spécial sur } R, \\ \rho\colon \mathbf{X} \times_{\mathrm{Spec}\,\bar{\mathbb{F}}_p} \bar{R} \to X \times_R \bar{R} \\ \text{une } O_D\text{-quasi-isogénie de hauteur } 0 \end{array} \right\}, \tag{1.5}$$

où pour $R$ un objet de $(\mathbf{Nilp}\,/O_{\breve{K}})$, on a posé $\bar{R} = R/pR$. Dans (cf. [Dri76]) Drinfeld démontre directement que ce foncteur est représentable en montrant qu'il est représentable par l'espace symétrique. On va donner une approche détournée, plus moderne mais aussi plus lourde en théorie préalable. Le foncteur (1.5) est un exemple *d'espace de Rapoport-Zink*, dans [RZ96] Rapoport et Zink montrent qu'une vaste classe de problèmes de modules de la sorte sont représentables par des schémas formels, localement formellement de type finis sur $O_{\breve{K}}$. On invoque ici cette théorie, plus précisément [RZ96, 3.25] et [RZ96, 3.54], pour avoir la représentabilité de notre problème de modules.

**Proposition 1.17.** *Le foncteur (1.5) est représentable par un schéma formel* $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ [7] *localement formellement de type fini sur* $\operatorname{Spf} O_{\breve{K}}$.

□

Le fait qu'il soit localement formellement de type fini nous permet de définir sa fibre générique au sens de Berthelot, $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{rig}}$, qui est un espace rigide au sens de Tate sur $\breve{K}$. Ce schéma formel est muni d'une action de $\mathrm{GL}_d(K)$. Soit $R$ une $O_{\breve{K}}$-algèbre tel que $p$ soit nilpotente et soit $x \in \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}(R)$ représenté par un couple $(X, \rho)$. Alors pour $g \in \mathrm{GL}_d(K)$, tel que $\det(g)$ soit de valuation $p$-adique nulle, agit sur $x$ par $g \cdot x = (X, \rho \circ g^{-1})$. On peut étendre cette action à $\mathrm{GL}_d(K)$ tout entier [8].

1.3.3. *L'espace est p-adique.* On commence par un lemme important. On fixe $R$ un objet de $(\mathbf{Nilp}\,/O_{\breve{K}})$. On suppose que $R$ est un anneau local complet, noetherien, de caractéristique $p$ et on note $k$ son corps résiduel.

**Lemme 1.18.** *Soit* $(X, \rho) \in \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}(R)$ *et soit* $M = M_{O_K}(X)$ *le module de Cartier spécial de* $X$*. Supposons que* $X$ *possède un indice critique* $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$*. Alors* $M_i$ *admet une base* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ *de* $\mathrm{W}_{O_K}(R)$*-module telle que pour tout* $j = 1, \ldots, d$ *on a* $\Pi\gamma_j = V\gamma_j$.

*Démonstration.* Soit $M = M_{O_K}(X)$. On fixe $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ un indice critique. Alors $\Pi M_i \subset V M_i$ et comme $V$ est injectif, on peut définir un opérateur

$$U = V^{-1}\Pi \colon M_i \to M_i.$$

On fixe un entier $n \geqslant 1$. Pour toute $R$-algèbre $R'$, on note $M_{R'}$ le module de Cartier spécial du changement de base $X_{R'}$. Le but est de montrer que le foncteur sur les $R$-algèbres, défini par les invariants sous $U$,

$$\eta_X^i[n] \colon R' \rightsquigarrow \left((M_{R'})_i / V^{nd}(M_{R'})_i\right)^U$$

est représentable par un schéma étale sur $\operatorname{Spec} R$. Comme la question est locale sur $R$, on peut supposer que $M$ admet une $V$-base homogène $m_1, \ldots, m_d \in M$. C'est à dire que pour tout $j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on a $m_j \in M_j$ et un élément $x \in (M_{R'})_i/V^{nd}(M_{R'})_i$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{j=0}^{nd-1} V^j[x_j] m_{i-j}, \ x_j \in R'.$$

Ainsi le foncteur $R' \rightsquigarrow (M_{R'})_i/V^{nd}(M_{R'})_i$ est représentable par l'espace affine $\mathbb{A}_R^{nd}$ sur $R$. Donc le foncteur $\eta_X^i[n]$ est représentable [9] par un schéma de présentation fini sur $R$ ; pour montrer qu'il est étale, on peut appliquer le critère infinitésimal : soit $R' \to R''$ une surjection de $R$-algèbres, dont le noyau $I$ est nilpotent. On doit montrer que le noyaux de la surjection

$$(M_{R'})_i/V^{nd}(M_{R'})_i \to (M_{R''})_i/V^{nd}(M_{R''})_i,$$

induit une bijection sur les $U$-invariants. Pour cela, il suffit de montrer que $U$ est nilpotent sur le noyau de cette surjection. Comme $\Pi$ et $V$ commutent il est suffisant de comprendre pourquoi pour un entier $N \geqslant 0$, suffisamment grand, on a dans $M_{R'}/V^{nd}M_{R'}$

$$\Pi^N \left( \sum_{j=0}^{nd-1} V^j[x_j] m_{i-j} \right) = 0, \ x_j \in I.$$

Or, comme $M$ est $V$-adiquement et $\Pi$-adiquement séparé, pour tout entier $t \geqslant 0$ il existe un entier $N$ tel que $\Pi^N m_{i-j} \in V^t M$. Ce qui prouve le fait pour $t$ assez grand.

7. Notons que si on ne fixe pas la hauteur de la quasi-isogénie, le problème de modules est représentable par $\coprod_{i \in \mathbb{Z}} \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^i$, où $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^i$ correspond à la composante connexe telle que la quasi-isogénie est de hauteur fixée *ind*. De plus, on a naturellement $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^i \cong \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$.

8. Si on ne fait pas cette hypothèse sur la valuation $p$-adique du déterminant de $g$, $\rho \circ g^{-1}$ n'est en général pas de hauteur 0. Mais $\mathrm{GL}_d(K)$ agit de la sorte sur le problème de module où on ne fixe pas la hauteur de la quasi-isogénie mais échange alors les composantes connexes. Pour obtenir l'action sur $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ il faut alors descendre cette action sur une composante.

9. Pour montrer que les invariants sous un opérateur $\sigma$-linéaire est représentable, on peut consulter [RZ96, 1.13].

Comme $\eta_X^i[n]$ est naturellement muni d'une structure de $O_K$-module, il est donc, localement pour la topologie étale, isomorphe à $\underline{(O_K/\pi^n O_K)}_R^d$. Or, rappelons qu'on s'est donné de plus une quasi-isogénie $\mathbf{X}_k \to X_k$, donc $\eta_X^i[n]$ est constant une fois restreint à $\operatorname{Spec} k$. Il est donc constant sur $\operatorname{Spec} R$, i.e

$$\eta_X^i[n] \cong \underline{(O_K/\pi^n O_K)}_R^d.$$

En passant à la limite sur $n$, on peut donc choisir une $O_K$-base $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in M_i$ telle que $\Pi\gamma_j = V\gamma_j$. Ceci démontre le lemme. □

Notons qu'en particulier on a un isomorphisme $\mathbf{M}_0^U \cong O_K^d$. Ce lemme nous permet de montrer la proposition suivante :

**Proposition 1.19.** *Soit $X$ un $O_D$-module formel spécial sur $R$. Toute quasi-isogénie $\mathbf{X}_k \to X_k$, où $k$ est le corps résiduel de $R$, s'étend de manière unique en une quasi-isogénie $\mathbf{X}_R \to X$.*

□

L'idée pour montrer cette proposition est que une présentation de $\mathbf{M}_R$ est donnée par les équations $\Pi m_k = V m_k$ où les $m_k$ forment une $V$-base de $\mathbf{M}$. On suppose tout d'abord que $X$ admet un indice critique $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On choisit $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in M_i$, où $M = M_{O_K}(X)$, comme au lemme précédent ce qui nous donne un morphisme de modules de Cartier $\mathbf{M}_R \to M$, obtenu par $m_k \to V^{k-i}\gamma_k$. On peut montrer, à l'aide du critère fibre à fibre de Zink [10] (cf. [Zin80, Satz 1.7]), que ceci définit une isogénie $\mathbf{X}_R \to X$ de hauteur $d(d-1)$, que l'on peut tordre par une quasi-isogénie de $\mathbf{X}$ [11] pour obtenir le relèvement. Dans la situation générale, on recouvre $\operatorname{Spec} R$ par des fermés tels que $X$ admet un indice critique sur chacun de ces fermés. Par la rigidité, une quasi-isogénie est bien définie sur un ensemble Zariski fermé : Elle ne dépend pas de la structure de schéma du fermé. Il faut ensuite recoller ces quasi-isogénies sur $R$, ce qui est possible car on peut montrer que les quasi-isogénies forment un faisceau. On est maintenant en mesure de montrer que l'espace de Drinfeld est $p$-adique :

**Théorème 1.20.** *L'espace $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ est un schéma formel $p$-adique.*

*Démonstration.* Il est suffisant de montrer que le schéma formel

$$\mathscr{X} = \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}} \times_{\operatorname{Spf} O_{\breve{K}}} \operatorname{Spec} O_{\breve{K}}/pO_{\breve{K}},$$

est un schéma classique. Pour cela, il suffit de montrer qu'un certain faisceau d'idéaux de définition de $\mathscr{X}$ est localement nilpotent. Soit $z \in \mathscr{X}$, on note $R = \hat{\mathscr{O}}_{\mathscr{X},z}$ la complétion de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathscr{X},z}$, $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_{\mathscr{X},z}$ un idéal de définition et $k$ le corps résiduel correspondant. On va montrer que $\mathscr{I}$ est nilpotent dans $R$, pour cela il suffit de montrer que le morphisme naturel $(\mathscr{O}_{\mathscr{X},z}, \mathscr{I}) \to (R, 0)$ est continu, ou de façon équivalente, montrer qu'il existe un morphisme $\operatorname{Spf}(R, 0) \cong \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spf}(\mathscr{O}_{\mathscr{X},z}, \mathscr{I})$.

D'après le problème de modules, la famille universelle nous donne un $O_D$-module formel spécial $X$ sur $\operatorname{Spf} \mathscr{O}_{\mathscr{X},z}$ et une quasi-isogénie $\mathbf{X}_k \to X_k$. Or, par l'algébraisation, $X$ s'étend à $\operatorname{Spec} R$ et la quasi-isogénie s'étend de manière unique en une quasi-isogénie $\mathbf{X}_R \to X$, par la proposition précédente. Ainsi, on a définit un $R$-point de $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ centré en $z$, ce qui équivaut à un morphisme $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spf} \mathscr{O}_{\mathscr{X},z}$. Donc l'idéal de définition $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_{\mathscr{X},z}$ est nilpotent dans $R$. Or, par définition, ce morphisme rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Spf} \mathscr{O}_{\mathscr{X},z} \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathscr{X},z}, \end{tikzcd}$$

commutatif. Donc $\mathscr{I}$ est nilpotent dans $\mathscr{O}_{\mathscr{X},z}$, ce qui montre le corollaire. □

10. C'est à priori le seul endroit où on utilise que $R$ est noetherien...
11. Rappelons que les quasi-isogénies $O_D$-linéaires de $\mathbf{X}$ s'identifient à $\mathrm{GL}_d(K)$, cf. proposition 1.14.

## 2. Le modèle semi-stable de Deligne

2.1. **Construction du modèle semi-stable.** Dans cette section on construit l'espace symétrique de Deligne. On énoncera le théorème de Drinfeld et on expliquera comment le montrer en fibre spéciale.

2.1.1. *L'immeuble de Bruhat-Tits.* Le but de ce paragraphe est de rappeler la construction de *l'immeuble de Bruhat-Tits* de $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$. L'immeuble est un complexe simplicial $\mathcal{BT}_d$. Les 0-simplexes sont les classes d'homothétie $\bar{\eta}$ de $O_K$-réseaux de $K^d$. Pour $r$ un entier, tel que $0 \leqslant r < d$, un $r$-simplexe est un ensemble de 0-simplexes $\Delta = \{\bar{\eta}_{i_0}, \dots, \bar{\eta}_{i_r}\}$, pour des indices tels que $0 \leqslant i_0 < \dots i_r < d$, de sorte à ce qu'il existe, pour tout indice $i_k$, un représentant $\eta_{i_k} \in \bar{\eta}_{i_k}$ tel que

$$\pi\eta_{i_r} \subset \eta_{i_0} \subset \cdots \subset \eta_{i_r}.$$ [12]

On choisira, pour chaque simplexe, un représentant dans chaque classe d'homothétie satisfaisant cette condition. Ceci définit bien un complexe simplicial, pour les inclusions naturelles, que l'on note $\mathcal{BT}_d$. Le groupe $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ agit naturellement sur ce complexe.

2.1.2. *Le modèle formel.* On va construire le schéma formel de Deligne, modelé sur $\mathcal{BT}_d$. Soit $r$ un entier comme précédemment et $\Delta = \{\bar{\eta}_{i_0}, \dots, \bar{\eta}_{i_r}\}$, pour des indices tels que $0 \leqslant i_0 < \dots i_r < d$, un $r$ simplexe. On fixe des représentants des classes d'homothétie en question comme précédemment. On pose de plus $C_\Delta = \{i_0, \dots, i_k\}$ l'ensemble des *indices critiques* de $\Delta$. On va définir un foncteur $F_\Delta$ sur $(\mathbf{Nilp}\,/O_K)$, la catégorie des $O_K$-algèbres telles que $p$ est localement nilpotent. Soit $R$ une telle algèbre, alors $F_\Delta(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\eta_{i_0} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_{i_0}"] & \eta_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_{i_1}"] & \cdots \arrow[r, hook] & \eta_{i_r} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_{i_r}"] & \eta_{i_0} \arrow[d] \\
L_{i_0} \arrow[r] & L_{i_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_{i_r} \arrow[r] & L_{i_0},
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

tels que,

- $L_{i_0}, \dots, L_{i_r}$ sont des $R$-modules inversibles,
- les flèches du bas sont des morphismes de $R$-modules,
- $\varphi_{i_0}, \dots, \varphi_{i_r}$ sont des morphismes de $O_K$-modules,
- pour tout indice $i_k$, et tout $v \in \eta_{i_k} \backslash \eta_{i_{k-1}}$, la section $\varphi_{i_k}(v)$ ne s'annule nulle part sur $\operatorname{Spec} R$.

Le foncteur $F_\Delta$ est représentable par un schéma formel $p$-adique sur $O_K$, que l'on note $\hat{\Omega}_\Delta$. C'est un sous-schéma formel ouvert du schéma formel

$$\operatorname{Spf} \frac{O_K\langle x_0, \dots, x_{d-1}\rangle\langle x_i^{-1}\rangle_{i \notin C_\Delta}}{\langle x_0 \cdots x_{d-1} - \pi\rangle},$$

où $x_i$ pour $i \in C_\Delta$ correspond au morphisme $L_i \to L_{i+1}$.

On va maintenant recoller tous ces schémas formels. Soit $i \in C_\Delta$, on pose $\Delta' = \Delta \backslash \{\eta_i\}$. On obtient une immersion ouverte $\hat{\Omega}_{\Delta'} \hookrightarrow \hat{\Omega}_\Delta$ obtenu en inversant $x_i$. En terme des foncteurs, $F_{\Delta'}$ s'identifie au sous-foncteur ouvert de $F_\Delta$ obtenu en ajoutant la condition "le morphisme $L_i \to L_{i+1}$ est un isomorphisme" dans le diagramme (2.1). Ainsi, les $\hat{\Omega}_\Delta$ munis de ces immersions ouvertes définissent un système inductif indexé sur $\mathcal{BT}_d$, on peut donc définir

$$\hat{\Omega}_{O_K} = \varinjlim_{\Delta \in \mathcal{BT}} \hat{\Omega}_\Delta,$$

le *schéma formel de Deligne*, qui est un schéma formel $p$-adique sur $O_K$. Ce schéma est muni d'une action de $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ : si $g \in \mathrm{GL}_{d+1}(K)$, alors $g$ agit sur un diagramme de la forme (2.1) par $\eta_i \mapsto g\eta_i$ et $\varphi_i \mapsto \varphi_i \circ g^{-1}$ pour tout $i \in C_\Delta$.

12. Noter que les inclusions sont propres car les classes d'homothétie des réseaux en question sont différentes.

On peut considérer la fibre générique $\hat{\Omega}_K^{\mathrm{rig}} = \Omega_{O_K}$. Cet espace rigide est bien l'espace symétrique que l'on a déjà rencontré, donné pour $L/K$ une extension, par

$$\Omega_K(L) = \mathbb{P}_K^{d-1}(L) - \bigcup_{H \in \mathscr{H}_K} H(L),$$

où $\mathscr{H}_K$ est l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}_K^{d-1}$ définis sur $K$. Cette identification a été faite dans le groupe de travail pour $d = 2$, elle se fait de la même façon en dimension supérieure [13].

2.1.3. *Le théorème de Drinfeld.* On énonce maintenant le théorème principal de ces notes. C'est un théorème difficile mais fondamental, dû à Drinfeld (cf. [Dri76]).

**Théorème 2.1.** *Il existe un isomorphisme* $\mathrm{GL}_d(K)$*-équivariant,*

$$\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}} \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}_{O_{\breve{K}}},$$

*où* $\hat{\Omega}_{O_{\breve{K}}} = \hat{\Omega}_{O_K} \otimes_{O_K} O_{\breve{K}}$.

On n'expliquera pas la preuve complète de ce théorème. On expliquera néanmoins comment on peut identifier les fibres spéciales et les fibres génériques pour les points classiques (i.e. pour les extensions finies $L/\breve{K}$).

On explique comment construire le morphisme du théorème 2.1 pour des algèbres de caractéristique $p$. Moralement, la ligne du haut de (2.1) provient du module de Cartier spécial, et celle du bas correspond à l'algèbre de Lie. Soit $R$ une $O_{\breve{K}}$-algèbre de caractéristique $p$. Soit $(X, \rho) \in \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}(R)$, on note $M = M_{O_K}(X)$. On note de plus $C$ l'ensemble des indices critiques de $X$.

On explique la situation où $C = \{i\}$ est un singleton. Pour $n$ un entier, on note $\eta_X^i[n]$ le faisceau étale introduit dans la preuve du lemme 1.18 et on pose $\eta_X^i = \varprojlim_n \eta_X^i[n]$ qui s'identifie, à l'aide de $\rho$, au faisceau constant $\underline{O_K}^d$. La quasi-isogénie $\rho$ induit un isomorphisme entre les $\sigma$-isocristaux $M_{0,\mathbb{Q}} \cong \mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}$. Si on prend les $V^{-1}\Pi$ invariants, on voit qu'on identifie $\eta_X^i$ à un réseau de $\mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}^{\mathbf{V}^{-1}\Pi} \cong K^d$. Ainsi, la composée

$$\varphi_X^i \colon \eta_X^i \to M_i \to \mathrm{Lie}(X)_i, \tag{2.2}$$

définit un point de $\hat{\Omega}_\Delta(R)$, pour $\Delta = \{\eta_X^i\}$. Pour le cas où $C$ n'est pas un singleton, l'idée est la même : on applique la construction précédente à tous les indices critiques de $C$, puis on obtient les inclusions entre les $\eta_X^i$ en appliquant l'injection $\Pi$. Ainsi, si $C = \{i_0, \ldots, i_r\}$ où $i_0 < i_1 < \cdots < i_r$, pour $0 \leqslant r \leqslant d$, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\eta_X^{i_0} \arrow[r, hook, "\Pi^{i_1 - i_0}"] \arrow[d, "\varphi_X^{i_0}"] & \eta_X^{i_1} \arrow[r, hook, "\Pi^{i_2 - i_1}"] \arrow[d, "\varphi_X^{i_1}"] & \cdots \arrow[r, hook, "\Pi^{i_r - i_{r-1}}"] & \eta_X^{i_r} \arrow[r, "\Pi^{d - i_r + i_0}"] \arrow[d, "\varphi_{i_r}"] & \eta_X^{i_0} \arrow[d] \\
\mathrm{Lie}(X)_{i_0} \arrow[r] & \mathrm{Lie}(X)_{i_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Lie}(X)_{i_r} \arrow[r] & \mathrm{Lie}(X)_{i_0}
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

qui définit (à peu de choses près [14]) un point de $\hat{\Omega}_\Delta(R)$ pour $\Delta = \{\eta_X^{i_0}, \ldots, \eta_X^{i_r}\}$. La construction de ce morphisme dans le cas où $R$ n'est pas de caractéristique $p$ est plus délicate.

Dans le cas où $R = k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$, on peut conclure que le morphisme est un isomorphisme en fibre spéciale en construisant explicitement un inverse. On veut reconstruire un module de Cartier spécial à partir de la donné d'un diagramme (2.1), ou de manière équivalente d'un diagramme (2.3), sur $k$ ; on note $C = \{i_0, \ldots, i_r\}$ l'ensemble de ses indices critiques. Remarquons que, dans ce cas, les morphismes de la ligne du bas sont soit nuls, soit des isomorphismes. Pour tout $i \in C$, $\eta_i$ définit un isocristal unité $(M_{i,\mathbb{Q}}, U_i)$ de dimension $d$ sur $k$ contenant un sous-réseau $M_i$ stable par $U_i$. On note $I_{i-1} = \ker(\varphi_i \colon M_i \to L_i)$.

Si $i-1$ n'est pas critique, on pose $M_{i-1} = I_{i-1} \otimes_{\mathrm{W}_{O_K}(L),\sigma} \mathrm{W}_{O_K}(L)$ et $V_{i-1} \colon M_{i-1} \to M_i$ l'opérateur $\sigma^{-1}$-linéaire défini par l'inclusion $I_i \subset M_i$. On peut alors définir $\Pi_{i-1} = U_i \circ V_{i-1}$, qui est injectif. On passe maintenant à $i-2$. Notons que comme $i-1$ n'est pas critique on veut que le morphisme induit par $\Pi_{i-1} \colon M_{i-1}/V_{i-2}M_{i-2} \to L_i$ soit un isomorphisme, donc on pose

13. On peut aussi le faire à l'aide d'un morphisme de période explicité par Drinfeld dans [Dri76]. Ce morphisme s'avère être le même que celui dont on fera usage ultérieurement (cf. [RZ96, 5.48]).

14. Il faut tordre les inclusions de sorte à ce que la dernière inclusion s'identifie à $\pi$.

$I_{i-2} = \Pi_{i-1}^{-1}(I_{i-1})$. De même que précédemment on en déduit $M_{i-2} = I_{i-2} \otimes_{\mathrm{W}_{O_K}(L),\sigma} \mathrm{W}_{O_K}(L)$ et $V_{i-2}$ définit par l'inclusion $I_{i-2} \subset M_{i-1}$. De plus, $M_{i-1}$ définit naturellement un isocristal unité $(M_{i-1,\mathbb{Q}}, U_{i-1})$ tel que $M_{i-1}$ est stable par $U_{i-1}$ ce qui nous permet de définir $\Pi_{i-2} = U_{i-1} \circ V_{i-2}$. Il faut vérifier que tout est compatible, puis par récurrence on a défini pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ des $W_{O_K}(L)$-modules $M_i$ munis d'opérateurs $V_i \colon M_i \to M_{i+1}$ et $\Pi_i \colon M_i \to M_{i+1}$. Ceci définit bien un module de Cartier spécial $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_i$.

Par construction, ce morphisme est bien un inverse du précédent. Notons que la quasi-isogénie s'obtient naturellement car les $\eta_i$ sont des sous-$O_K$-réseaux de $K^d$ et on a fixé un isomorphisme $K^d \cong \mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}^{\Pi V^{-1}}$.

2.2. **La fibre générique.** Dans cette section on va comparer les fibres rigides analytiques des deux espaces, pour obtenir le théorème 2.1 en fibre générique.

2.2.1. *Le morphisme des périodes.* On introduit le morphisme des périodes pour $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{rig}}$. C'est un analogue $p$-adique du morphisme des périodes en géométrie complexe : on encode dans une variété de drapeau les filtrations de Hodge qui apparaissent dans le problème de modules. Dans [Dri76], Drinfeld introduit un morphisme des périodes défini sur l'espace symétrique. Ce morphisme coïncide avec le morphisme définit ici (cf. [RZ96, 5.48]), mais on n'en dira pas plus.

On définit un morphisme

$$\breve{\pi} \colon \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{rig}} \to \mathbb{P}_{\breve{K}}^{d},$$

où $\mathbb{P}_{\breve{K}}^{d}$ désigne l'espace projectif rigide analytique sur $\breve{K}$. C'est la fibre rigide au sens de Raynaud du schéma formel $p$-adique $\hat{\mathbb{P}}_{O_{\breve{K}}}^{d}$ [15].

Soit $L/\breve{K}$ une extension ; On définit $\breve{\pi}$ sur les $L$-points. On note que comme $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}$ est localement formellement de type fini, on a $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{rig}}(L) = \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}(O_L)$. Un point $x = (X, \rho)$ de $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{rig}}(L)$ est donc constitué d'un $O_D$-module formel spécial $X$ sur $O_L$ et d'une quasi-isogénie $\rho \colon \mathbf{X}_R \to X_R$, où $R = O_L/pO_L$. Cette quasi-isogénie induit un isomorphisme sur les $\sigma$-isocristaux correspondants et la filtration de Hodge rationnelle de $X$ donne donc un morphisme surjectif

$$\mathbf{M}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\breve{K}} L \to \mathrm{Lie}(X) \otimes_{O_L} L.$$

On restreint cette surjection à la composante en 0 puis on prend les $\Pi\mathbf{V}^{-1}$-invariants, rappelons que $\mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}^{\Pi\mathbf{V}^{-1}} \cong K^d$. On définit ainsi un point de $\mathbb{P}_{\breve{K}}^{d}(L)$ [16] :

$$\mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}^{\Pi\mathbf{V}^{-1}} \otimes_K L \to \mathrm{Lie}(X)_0 \otimes_{O_L} L,$$

comme $\mathrm{Lie}(X)_0$ est de rang 1 sur $O_L$. La donnée de cette surjection est équivalente à la donnée de la filtration de Hodge. On voudrait montrer que $\breve{\pi}$ induit un isomorphisme sur $\Omega_{\breve{K}}^{d} \subset \mathbb{P}_{\breve{K}}^{d}$. Dans les paragraphes suivants, on démontre une version beaucoup plus faible de ce théorème :

**Théorème 2.2.** *Soit $L/\breve{K}$ une extension finie, alors l'application*

$$\breve{\pi}_L \colon \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{rig}(L) \to \mathbb{P}_{\breve{K}}^{d}(L),$$

*induit une bijection de $\mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{rig}(L)$ sur $\Omega_{\breve{K}}(L)$.*

Dans les deux prochains paragraphes, on montrera respectivement l'injectivité et la surjectivité.

2.2.2. *Module de Tate.* Pour montrer l'injectivité, on a besoin du module de Tate d'un groupe $p$-divisible :

**Définition 2.3.** Soit $X$ un groupe $p$-divisible sur $O_L$. Le *module de Tate* de $X$ est une $\mathbb{Z}_p$-représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ [17], définie par

$$T_p(X) = \varprojlim_k X[p^k](\bar{L}),$$

15. Ou si on préfère, l'image par le GAGA rigide de l'espace projectif, en tant que variété algébrique, sur $\breve{K}$.

16. On considère ici l'espace projectif à la Grothendieck : celui-ci paramètre les quotients de rang 1 plutôt que les inclusions de rang 1.

17. C'est-à-dire un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini muni d'une action linéaire de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$.

où la limite projective se fait sur les morphismes $p\colon X[p^k] \to X[p^{k-1}]$. De manière équivalente $T_p(X) = \mathrm{Hom}\left(\underline{(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)}_{O_L}, X_K\right)$. De plus, son rang est la hauteur de $X$.

Le *module de Tate rationnel* est la $\mathbb{Q}_p$-représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ donnée par $V_p(X) = T_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Grâce au théorème suivant de Tate (cf. [Tat67, Theorem 4], comme $O_L$ est supposé noetherien, les isogénies entres groupes $p$-divisibles sont déterminées par les morphismes Galois invariants entre leurs modules de Tate :

**Théorème 2.4.** *Soit $Y_1$ et $Y_2$ des groupes $p$-divisibles sur $O_L$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}(Y_1, Y_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)}(T_p(Y_1), T_p(Y_2)),$$

*est une bijection.*

□

Notons que si $X$ est un $O_D$-module $p$-divisible alors $T_p(X)$ est un $O_D$-module galoisien tel que l'action de $O_D$ soit compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. Comme le morphisme du théorème est naturel, on a de même une bijection entre les isogénies $O_D$-linéaires et les morphismes $O_D$-linéaires et invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ entre les modules de Tate. On est en mesure de démontrer l'injectivité.

Soit $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{rig}}(L)$ tels que $\breve{\pi}_L(X_1, \rho_1) = \breve{\pi}_L(X_2, \rho_2)$. On veut montrer que $\rho_1 \circ \rho_2^{-1}$ se relève en un isomorphisme sur $O_L$. Or, par hypothèse, la quasi-isogénie $\rho_1 \circ \rho_2^{-1}\colon (X_2)_R \to (X_1)_R$ respecte la filtration de Hodge rationnelle. Ainsi, il existe un entier $a \geqslant 0$, tel que $p^a(\rho_1 \circ \rho_2^{-1})$ est une isogénie qui respecte la filtration de Hodge. Ainsi, par la théorie de Grothendieck-Messing, l'isogénie $O_D$-linéaire $p^a(\rho_1 \circ \rho_2^{-1})$ se relève en une isogénie $O_D$-linéaire $f\colon X_2 \to X_1$. Comme $\rho_1 \circ \rho_2^{-1}$ est de hauteur 0, $\frac{1}{p^a} f\colon X_2 \to X_1$ est une quasi-isogénie de hauteur 0. Mais le lemme suivant nous assure que c'est alors un isomorphisme :

**Lemme 2.5.** *Soit $X_1$, $X_2$ des $O_D$-modules formels spéciaux sur $O_L$ et $\rho\colon X_1 \to X_2$ une quasi-isogénie $O_D$-linéaire. Si $\rho$ est de hauteur* 0*, alors c'est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Premièrement, le module de Tate d'un $O_D$-module formel spécial est facile à décrire : Soit $X$ un $O_D$-module formel $p$-divisible sur $O_L$. Alors $T_p(X)$ est un $O_D$-module libre de rang 1. En effet $X$ est de hauteur $nd^2$ et l'action de $\Pi$ sur $T_p(X)$ est injective par le théorème de Tate.

Ainsi, d'après le théorème 2.4, $\rho$ est déterminé par un élément $d \in O_D \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = D$. De plus, $\Pi$ définit une isogénie de hauteur $qn$ et donc si $d = d'\Pi^k$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $d' \in O_D^\times$, alors $\rho$ est de hauteur $knq$. Donc, si $\rho$ est de hauteur 0 alors $d \in O_D^\times$, ce qui démontre le lemme. □

2.2.3. *Isocristaux filtrés.* On va expliquer pourquoi le morphisme des périodes $\breve{\pi}$ a pour image l'espace symétrique $\Omega_{\breve{K}}$. Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$. On a déjà rencontré les $\sigma$-isocristaux sur $k$ qui caractérisent les classes d'isogénie de modules $p$-divisibles sur $k$. La donnée d'un relèvement de ce module $p$-divisible en caractéristique 0 revient à se donner une filtration de l'isocristal. Toute filtration de l'isocristal ne définit pas forcément un relèvement et on peut traduire la condition en termes d'algèbre semi-linéaire. On fixe $L/\breve{K}$ une extension finie, soit $k$ son corps résiduel (qui est le corps résiduel de $\breve{K}$).

**Définition 2.6.** Un *$\sigma$-isocristal filtré sur $L$* est un triplet $(V, \Phi, \mathscr{F}^\bullet)$ où $(V, \Phi)$ est un $\sigma$-isocristal sur $k$ et $\mathscr{F}^\bullet$ est une filtration finie décroissante exhaustive et séparante sur $V \otimes_{\breve{K}} L$[18]. Un *sous-$\sigma$-isocristal filtré sur $L$* est un triplet $(V', \Phi, (\mathscr{F}')^\bullet)$ tel que $(V', \Phi)$ est un sous-$\sigma$-isocristal de $(V, \Phi)$ et $(\mathscr{F}')^\bullet$ est la filtration induite par $\mathscr{F}^\bullet$. On a ainsi défini une catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire qui est même une $\otimes$-catégorie.

Soit $X$ un $O_K$-module $p$-divisible sur $O_L$. Alors son module de Cartier rationnel $V = M_{O_K}(X)_{\mathbb{Q}}$ est un $\sigma$-isocristal sur $k$, qui caractérise la classe d'isogénie de $X_k$, la réduction modulo $\pi$ de $X$. On a de plus la filtration de Hodge :

$$V \otimes_{\breve{K}} L \to \mathrm{Lie}(X) \otimes_{O_L} L,$$

18. Ceci signifie qu'il existe des entiers $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathscr{F}^r = V \otimes_{\breve{K}} L$ et $\mathscr{F}^s = 0$.

qui, comme on l'a vu, caractérise la classe d'isogénie du relèvement $X$, de $X_k$, sur $O_L$. On pose $\mathscr{F}^1 = \ker\big(V \otimes_{\breve{K}} L \to \mathrm{Lie}(X) \otimes_{O_L} L\big)$ et $\mathscr{F}^0 = V \otimes_{\breve{K}} L$, $\mathscr{F}^2 = 0$, ce qui définit un $\sigma$-isocristal filtré sur $L$. On veut caractériser en terme d'algèbre semi-linéaire, les filtrations de $V \otimes_{\breve{K}} L$ qui proviennent d'un relèvement de $X_k$ à $O_L$. Soit $(V, \Phi, \mathscr{F}^\bullet)$ un $\sigma$-isocristal filtré sur $L$ non-nul. On définit sa *pente de Harder-Narasimhan*

$$\mu(V) = \frac{\sum i \cdot \dim \mathrm{gr}^i_{\mathscr{F}}(V \otimes_{\breve{K}} L) - \mathrm{ord}_\pi \det(\Phi)}{\dim_{\breve{K}} V}.$$

Comme pour les fibrés vectoriels sur une courbe, on peut définir une théorie de Harder-Narasimhan pour les isocristaux filtrés [19]. On dit que $(V, \Phi, \mathscr{F}^\bullet)$ est *semi-stable* si pour tout sous-objet $(V', \Phi, (\mathscr{F}')^\bullet)$ on a $\mu(V') \leqslant \mu(V)$. On dit que $(V, \Phi, \mathscr{F}^\bullet)$ est *faiblement admissible* s'il est semi-stable et $\mu(V) = 0$. Le théorème suivant est essentiellement dû à Fontaine :

**Théorème 2.7.** *Soit $X_k$ un $O_K$-module $p$-divisible sur $k$ et $V$ le $\sigma$-isocristal associé sur $k$. Alors une filtration $\mathscr{F}$ de $V \otimes_K L$, telle que $\mathscr{F}^0 = V \otimes_K L$ et $\mathscr{F}^2 = 0$, définit la filtration de Hodge rationnelle d'un relèvement à $O_L$ de $X_k$, si et seulement si la filtration est faiblement admissible.*

□

Ceci va nous permettre de montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.8.** *L'image du morphisme*

$$\breve{\pi}_L \colon \mathscr{M}^{rig}_{\mathrm{Dr}}(L) \to \mathbb{P}^d_{\breve{K}}(L),$$

*est $\Omega_{\breve{K}}(L)$.*

*Démonstration.* On montre que l'image est contenue dans $\Omega_{\breve{K}}(L)$. Soit $(X, \rho)$ un point de $\mathscr{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{Dr}}(L) = \mathscr{M}_{\mathrm{Dr}}(O_L)$, on note $V = M_{O_K}(X)_{\mathbb{Q}}$ et $\Phi$ le Frobenius. Le couple $(V, \Phi)$ est le $\sigma$-isocristal associé à $X$. La quasi-isogénie $\rho$ définie un isomorphisme avec l'isocristal de $\mathbf{X}$ et donc $\Phi$ est défini par

$$\mathbf{F} = \pi \mathbf{V}^{-1} = \sigma \pi \Pi^{-1}.$$

Ainsi, $(V, \Phi)$ est un $\sigma$-isocristal de dimension $d^2$, isocoline de pente $(d-1)/d$.

L'image de $(X, \rho)$ par $\breve{\pi}$ est un point de $\mathbb{P}^d_{\breve{K}}(L)$ défini par

$$\mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}^{\Pi \mathbf{V}^{-1}} \otimes_K L \to \mathrm{Lie}(X)_0 \otimes_{O_L} L.$$

Il suffit de montrer que le noyau $\mathscr{F}_0$ de ce morphisme ne contient pas de $K$-droite. Soit $D \subset \mathbf{M}_{0,\mathbb{Q}}^{\Pi \mathbf{V}^{-1}}$ une $K$-droite. Soit $\mathscr{F}$ le noyau de

$$V \otimes_{\breve{K}} L \to \mathrm{Lie}(X) \otimes_{O_L} L.$$

La $K$-droite $D$ définie un un sous-L-espace $\mathscr{L} \subset V \otimes_{\breve{K}} L$ de dimension $d$, stable sous $\Phi$ et de même un sous $L$-espace de dimension 1 de $\mathscr{L}_0 \subset V_0 \otimes_{\breve{K}} L$. On obtient donc un sous-isocristal filtré de $V$. Par le théorème 2.7, la filtration de Hodge rationnelle est semi-stable. Or, $\mathrm{ord}_\pi \det(\Phi, \mathscr{L}) = (d-1)$ et $\dim(\mathscr{F} \cap \mathscr{L}) = d \dim(\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{L}_0)$, ainsi la condition de semi-stabilité donne

$$\dim_K(\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{L}_0) \leqslant \frac{d-1}{d}.$$

Donc $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{L}_0 = 0$ et on en déduit que $D$ n'est pas inclue dans $\mathscr{F}_0$. La réciproque se fait de même, en remarquant que l'on a $\mu(V) = 0$ et donc $V$ faiblement admissible équivaut à $V$ semi-stable. □

2.2.4. *Apologie galoisienne.* Dans la preuve de l'injectivité du morphisme de période, on a fait usage du module de Tate, qui est une représentation galoisienne. Dans la preuve de la surjectivité on a fait appel aux isocristaux filtrés. L'apparition simultanée de ces deux objets est loin d'être innocente, encore moins dans le contexte des groupes $p$-divisibles ! Ces notes mériteraient donc une courte explication de ce que les représentations galoisiennes font ici...

19. La preuve est presque mot pour mot la même que pour les surfaces de Riemann. De plus, les isocristaux filtrés s'interprètent comme des fibrés vectoriels sur la courbe de Fargues-Fontaine, ce qui renforce l'analogie.

## Références

[Dri76] V. G. Drinfeld. Coverings of $p$-adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(2) :29–40, 1976.

[RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Tat67] J. T. Tate. $p$-divisible groups. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer, Berlin, 1967.

[Zin80] Thomas Zink. Isogenien formaler Gruppen über einem lokal noetherschen Schema. *Math. Nachr.*, 99 :273–283, 1980.