Analyse complexe, Exercices n° 1 :

Séries entières

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 6 février 2023

```
Ce TD porte sur la convergence des séries, les séries entières et un peu de fonctions spéciales. On
corrigera les exercices : 1-2-3-4-6-8
```

Suites et séries

Exercice 1. "The beautiful sine formula"

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 2. Vrai-Faux

Vrai ou Faux ? Dans chaque cas donner une démonstration si c'est vrai et un contre-exemple si c'est faux.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes de parties réelles positives, i.e. $\Re(a_n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\sum_n a_n$ et $\sum_n a_n^2$ convergent. Alors $\sum_n |a_n|^2$ converge.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Si $\sum_n |a_n|^2$ converge alors $\sum_n |a_n|$ converge.
3. Une suite de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément converge simplement. Et réciproquement ?
4. Une série de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui converge normalement converge uniformément. Et réciproquement ?

Exercice 3. Permutations et convergence de séries

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

1. Supposons que $\sum_n a_n$ converge absolument et soit $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer qu'alors $\sum_n a_{\sigma(n)}$ converge et
$$\sum_n a_{\sigma(n)} = \sum_n a_n.$$
2. Montrer que si $\sum_n a_n$ converge simplement mais pas absolument alors il existe une bijection $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_n a_{\sigma(n)}$ diverge.
3. Montrer la réciproque de la première question : si pour toute bijection $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la série $\sum_n a_{\sigma(n)}$ converge alors $\sum_n a_n$ converge absolument et
$$\sum_n a_{\sigma(n)} = \sum_n a_n.$$

Convergence des séries entières

Exercice 4. Série harmonique

On définit la *série harmonique*, $(H_n)_{n\geqslant 1}$ par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$H(z) = \sum_{n\geqslant 1} H_n z^n$$

puis montrer que $H(z) = \frac{\log(1-z)}{z-1}$ pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ dans le disque de convergence.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 5. Séries entières rationnelles

Dans cet exercice on se propose d'étudier les séries entières qui sont des fractions rationnelles, i.e les séries de la forme $\sum_n a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ sont des polynômes.

1. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ une suite finie de nombres complexes telle que $\alpha_d \neq 0$ où $d \geqslant 1$ est un entier. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

   (i) La série entière $f(z) = \sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $Q(z) = 1+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_d z^d$ et P est un polynôme de degré plus petit que d.

   (ii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_{n+d} + \alpha_1 a_{n+d-1} + \cdots + \alpha_d a_n = 0.$$

   (iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n = \sum_{i=1}^{k} P_i(n)\gamma_i^n,$$
   où $1+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_d z^d = \prod_{i=1}^{k}(1-\gamma_i z)^{d_i}$, les γ_i étant deux à deux distincts et non nuls et P_i est un polynôme de degré plus petit que d_i.

2. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, i.e. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2},$$
   en déduire une expression explicite de F_n.

3. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$ le nombre de chemins de longueur n dans le plan, commençant à $(0,0)$ et de directions $(1,0)$, $(-1,0)$ ou $(0,1)$, qui ne se recoupent pas. Montrer
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = \frac{1+z}{1-2z-z^2},$$
   et en déduire une expression explicite de a_n.

Exercice 6. Sommation d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.

1. Montrer la *formule de sommation par partie* : pour tout entier $n \geqslant 1$ on a
   $$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

2. Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit telle que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit formée de nombres réels strictement positifs, décroissante, tendant vers 0. Montrer que la série $\sum_n a_n b_n$ converge.

3. Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0 telle que la série de terme général a_n soit divergente. Montrer que la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence 1, est convergente en tout point de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sauf en $z = 1$.

Exercice 7. Convergence au bord

Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons
$$E(f) = \{z \in \mathbb{U} \mid f(z) \text{ converge}\}$$
le sous-ensemble du cercle unité où la série converge.

1. Montrer qu'on peut avoir $E(f) = \mathbb{U}$, $E(f) = \varnothing$, ou $E(f) = \mathbb{U}\setminus\{z_0\}$ où $z_0 \in \mathbb{U}$. Donner dans chaque cas un exemple de séries entières satisfaisant cette propriété puis donner un exemple qui ne correspond à aucun des trois cas.

2. Supposons que f s'étende en une fonction $\overline{D} \to \mathbb{C}$ continue et injective, où $\overline{D} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. Exprimer l'aire de $f(\overline{D})$ en fonction des a_n et en déduire que $\sum_n n|a_n|^2$ converge puis montrer que pour tout $z \in \overline{D}$ on a
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n.$$

3. On va construire un exemple, dû à Luzin, de série entière vérifiant $\lim_n a_n = 0$ et telle que $E(f) = \varnothing$. Soit $m > 0$ un entier et posons
$$\Phi_m(z) \coloneqq 1 + z + \cdots + z^{m-1}.$$
   (a) Soit $z_0 \in \mathbb{U}$, montrer que
$$\max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} |\Phi_m(z_0 e^{\frac{2i\pi k}{m}})| \geqslant \frac{2m}{\pi}.$$
   (b) Posons
$$H_m(z) = \Phi_m(z) + z^m \Phi_m(z e^{\frac{-2i\pi}{m}}) + \cdots + z^{(m-1)m} \Phi_m(z e^{\frac{-2i\pi(m-1)}{m}}),$$
   et
$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} z^{1^2 + \cdots + (m-1)^2} H_m(z).$$
   Montrer que f satisfait aux conditions voulues.

Exercice 8. Lemme de la partie réelle

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence $+\infty$. Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^\times$, notons $M(r) = \sup_{|z| \leqslant r} |f(z)|$ et $A(r) = \sup_{|z| \leqslant r} |\Re(f(z))|$. Le but de l'exercice est de montrer le lemme suivant :

Lemme de la partie réelle : Pour tous $r, R \in \mathbb{R}_+^\times$, tels que $R > r$, on a
$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r} |f(0)| + \frac{2r}{R-r} A(R).$$

1. Montrer que pour tous $n \geqslant 1$ on a
$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \Re(f(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta.$$

2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $r > 0$ on a
$$|a_n| \leqslant \frac{2A(r)}{r^n}.$$
   En déduire que pour tous $R > r > 0$, $M(r) \leqslant \frac{2rA(R)}{R-r}$.

3. Conclure.

Fonctions spéciales

Exercice 9. Fonctions de Bessel du premier ordre

Soit $r \geqslant 1$ un entier, posons la série entière
$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Dans son domaine de convergence, ceci définit la *fonction de Bessel d'ordre r*.

1. Calculer le rayon de convergence de $J_r(z)$.

2. Montrer que $J_r(z)$ satisfait l'équation différentielle du second ordre,
$$\left(z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + (z^2 - r^2)\right) J_r(z) = 0.$$

3. Montrer *la formule de Hansen-Bessel*,

$$J_r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(r\theta - z\sin\theta)} d\theta.$$

Ceci permet de définir $J_r(z)$ pour $r \in \mathbb{Z}$. En déduire $J_{-r}(z) = (-1)^r J_r(z)$.

4. Montrer

$$\exp\left[\left(\frac{z}{2}\right)\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_r(z) t^n.$$

5. Montrer

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(nz).$$

Un tel développement, d'une fonction analytique en termes de fonctions de Bessel, est appelé une *série de Kapteyn*.

6. Montrer *le développement de Jacobi-Anger*

$$\exp\left[iz\cos\phi\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n J_n(z) e^{in\phi}.$$

Cette expression est très utile en théorie du signal pour calculer la série de Fourier des modulations de fréquence. Elle exprime une onde plane comme somme d'ondes cylindriques.

7. Montrer le *théorème de multiplication* : pour $m \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\lambda^{-m} J_m(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{(1-\lambda^2)z}{2}\right)^n J_{n+m}(z).$$

Exercice 10. Fonctions hypergéométriques

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ posons $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ le *symbole de Pochhammer*. Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^\times$ tels que $\gamma \notin -\mathbb{N}$, posons la série entière

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) \coloneqq \sum_n \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Dans son domaine de convergence, ceci définit les *fonctions hypergéométriques*.

1. Calculer le rayon de convergence des fonctions hypergéométriques.

2. Expliciter $F(\alpha, \beta, \beta; z)$; justifier la terminologie «hypergéométrique». Expliciter aussi $F(1, 1, 2; -z)$ et $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2)$ en terme de fonctions classiques.

3. Montrer

$$\frac{d^n}{dz^n} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n; z).$$

4. Montrer que $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre,

$$\left(z(z-1)\frac{d^2}{dz^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\frac{d}{dz} - \alpha\beta\right) F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 0.$$

5. Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{dz^2} + Q(z)u(z) = 0,$$

où $u = wv$ pour v et Q des fonctions que l'on explicitera.

6. Soit $k \in]-1, 1[$. On définit les *intégrales elliptiques de première et seconde espèce* respectivement par

$$K(k) \coloneqq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \ E(k) \coloneqq \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt.$$

Montrer $K(k) = \frac{\pi}{2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2)$ et $E(k) = \frac{\pi}{2} F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; k^2)$.