Analyse complexe, Exercices n° 2 :

$\boxed{\text{Fonctions analytiques}}$

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 13 février 2023

Ce TD porte sur les fonctions analytiques, les lacets et la formule de Cauchy. On corrigera les exercices 1-3-4-5-6-8

Fonctions analytiques

Exercice 1. L'anneau des fonctions analytiques

Pour $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert on notera $\mathcal{O}(U)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions analytiques sur U.

1. Montrer qu'une série entière $\sum_n a_n z^n$ est une fonction analytique à l'intérieur de son disque de convergence.
2. Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts et soient $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Montrer que la fonction $f \circ g : U \to \mathbb{C}$ est analytique.
3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$ deux fonctions analytiques. Montrer $f \cdot g \in \mathcal{O}(U)$ et en déduire que $\mathcal{O}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative.
4. Montrer que le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{O}(U)$ est l'ensemble des fonctions ne s'annulant pas sur U, i.e. $\mathcal{O}(U)^\times = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(z) \neq 0,\ \forall z \in U\}$.
5. Soit $\exp(z) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ qui définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Définir les fonctions analytiques $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et donner leur développement en série entière.
6. Montrer que $f(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est constante. Donner cette constante.

Exercice 2. Zéros d'une fonction analytique

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ pour $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et supposons que f n'est pas identiquement nulle sur U. Soit $K \subset U$ une partie non-vide, fermée et bornée. Montrer que l'ensemble $\{z \in K \mid f(z) = 0\}$ est fini.

Exercice 3. Théorème de Gauss-Lucas

Soit $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P.

Lacets et homotopies

Exercice 4. Réunion et simple connexité

1. Est-ce que la réunion de deux ouverts de $\mathbb{C}$ simplement connexes est simplement connexe ?
2. Montrer qu'une réunion croissante d'ouverts de $\mathbb{C}$ simplement connexes est simplement connexe.

Exercice 5. Le groupe fondamental

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in U$. Soit $\mathscr{C}^1_a([0,1], U) = \{\gamma : [0,1] \to U \mid \gamma\ \mathscr{C}^1$ par morceaux et tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = a\}$. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}^1_a([0,1], U)$. Pour tout $t \in [0,1]$ posons $\gamma_1 \wedge \gamma_2 : [0,1] \to U$ le chemin défini par

$$(\gamma_1 \wedge \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Montrer $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \in \mathscr{C}^1_a([0,1], U)$.
2. Soit $\gamma_3 \in \mathscr{C}^1_a([0,1], U)$ un troisième lacet. Montrer que $(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \wedge \gamma_3$ est homotope à $\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \wedge \gamma_3)$.
3. Soit $\gamma_1' = \gamma_1(1-t)$. Montrer que $\gamma_1 \wedge \gamma_1'$ est homotope à un lacet constant.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

4. Montrer que l'homotopie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}_a^1([0,1],U)$. On note $\pi_1(U,a)$ le quotient de $\mathscr{C}_a^1([0,1],U)$ par cette équivalence. Montrer que $\pi_1(U,a)$ muni de la loi induite par $\wedge$ est un groupe. C'est le *groupe fondamental de* U.
5. Soit $b \in U$ tel que $b \neq a$. Montrer que l'indice définit un morphisme de groupes $j(\cdot, b)\colon \pi_1(U \setminus \{b\}, a) \to \mathbb{Z}$.
6. Montrer $\pi_1(\mathbb{C}^\times, a) \cong \mathbb{Z}$ pour tout $a \in \mathbb{C}^\times$.

Théorie de Cauchy

Exercice 6. Calcul d'intégrales

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$ et posons $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Calculer les intégrales

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z},\ \ J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Exercice 7. Extension de la formule de Cauchy

Soient $D = D(0,R)$, le disque ouvert de rayon R, pour $R > 0$ un réel ; on notera $\bar{D}$ sa clôture dans $\mathbb{C}$. Soit $f\colon \bar{D} \to \mathbb{C}$ une application continue que l'on suppose analytique sur D. Soit $z \in D$, pour $|z| < r \leqslant R$, on pose

$$I_r = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u - z} du,$$

où $\gamma_r\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ est donné pour tout $t \in [0,1]$ par $\gamma_r(t) = re^{2i\pi t}$. Montrer $I_R = f(z)$.

Exercice 8. Une inégalité

Soit U un ouvert contenant $\bar{D}(0,1) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ et soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur U telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer $\int_0^{2\pi} [f(e^{it})]^4 dt = 0$.
2. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_0^{2\pi} [\Im(f(e^{it})]^4 dt \leqslant A \int_0^{2\pi} [\Re(f(e^{it})]^4 dt.$$

Exercice 9. Majoration des coefficients d'une fonction analytique

Soit $D = D(0,1)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Supposons que pour tout $z \in D$ on ait $|f(z)(1-z)| \leqslant 1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$|a_n| < e(n+1).$$

Exercice 10. Convexité du module

Soient $U = D(0,R)$, le disque ouvert de rayon $R > 0$ et $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins R. Pour $r \in]0, R[$ posons

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

1. Montrer

$$I(r) = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n}.$$

2. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Prouver que $I(r) > 0$ pour $r \in]0, R[$. Montrer que sur $]0, R[$, $\ln I(r)$ est une fonction convexe de $\ln r$.
3. Soit $r \in]0, R[$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $|\Re(f(0))| = |\Im(f(0))|$.
   (ii)

$$\int_0^{2\pi} [\Re(f(re^{it})]^2 dt = \int_0^{2\pi} [\Im(f(re^{it})]^2 dt.$$