Analyse complexe, Exercices n° 3 :

Fonctions holomorphes

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 20 février 2023

`Ce TD porte sur l'équation de Cauchy-Riemann et des applications de la formule de Cauchy. On corrigera les exercices 1-2-3-6-8`

Équations de Cauchy-Riemann

Exercice 1. Propriétés des fonctions holomorphes

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide.

1. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x+iy) = x + iy^2$. Existe-t-il un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction f est holomorphe ?
2. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que
$$a\Re(f) + b\Im(f) + c = 0.$$
Que peut-on dire de f ? Donner une interprétation géométrique.
3. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Montrer l'équivalence entre : f est constante, $\Re(f)$ est constante, $\Im(f)$ est constante, $|f|$ est constante, $\bar{f} \in \mathcal{O}(U)$.
4. Soit $f, g \in \mathcal{O}(U)$ telles que $f(z) + \bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.
5. Soit $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Supposons que g ne s'annule pas sur U et que $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in U$.
6. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Supposons qu'il existe $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\Re(f(z)) = F[\Im(f(z))]$ pour tout $z \in U$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. Branche du logarithme

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$. Écrire les conditions de Cauchy-Riemann pour f en coordonnées polaires.
2. En déduire l'existence d'une primitive holomorphe de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$.

Exercice 3. Involutions sur les fonctions holomorphes

1. Soit $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugaison complexe. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert σ-stable.
   (a) Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ et $g = \sigma \circ f \circ \sigma$. Montrer que g est holomorphe sur U.
   (b) Soit $n \geqslant 1$ un entier et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$. Posons
$$g_n = \sigma \circ f_n \circ \sigma \circ f_{n-1} \circ \sigma \cdots \sigma \circ f_1 \circ \sigma.$$
   Si n est impair, montrer que g_n est holomorphe. Et si n est pair ?
2. Posons $\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par $\theta(x+iy) = y + ix$. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert stable par θ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Posons $g\colon U \to \mathbb{C}$ défini par $g(z) = \overline{f(\theta(z))}$ pour tout $z \in U$. Montrer que g est holomorphe sur U.

Exercice 4. Théorème de Rolle

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe, $a, b \in U$ deux points distincts de U et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit $[a, b]$ le segment entre a et b. Montrer qu'il existe $c, d \in [a, b]$ tels que
$$f(b) - f(a) = (b-a)[\Re(f'(c)) + i\Im(f'(d))]$$

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 5. Partie réelle d'une fonction holomorphe

Soit $U = \{x+iy; -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Si $x+iy \in U$ posons

$$P(x,y) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y}.$$

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $f(0)=0$ et $P = \Re(f)$.

Applications de la formule de Cauchy

Exercice 6. Calcul d'intégrales

Notons $\gamma_{a,r} \colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ le cercle de rayon $r \in \mathbb{R}_+^\times$ et de centre $a \in \mathbb{C}$ i.e. $\gamma_{a,r}(t) = a + re^{it}$. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\gamma_{2,1}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}dz,\ \int_{\gamma_{1,3/2}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}dz,\ \int_{\gamma_{0,3}} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}dz,\ \int_{\gamma_{0,3}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}dz$$

$$\int_{\gamma_{0,r}} \frac{\sin z}{z-b}dz\ (b \in \mathbb{C}, |b| \neq r),\ \int_{\gamma_{1,1}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\ (n \in \mathbb{N}),\ \int_{\gamma_{0,r}} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}\ (|a| < r < |b|,\ n,m \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{i,1}} \frac{e^z}{z^2+1}dz,\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{-i,1}} \frac{e^z}{z^2+1}dz,\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{0,3}} \frac{e^z}{z^2+1}dz,\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1+2i,5}} \frac{4z}{z^2+9}dz.$$

Exercice 7. Une transformée de Fourier

Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos(ax)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-a^2/2}.$$

Exercice 8. Intégrales de Fresnel

Montrer

$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \int_0^\infty \sin(t^2)dt = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

Exercice 9. Une commutativité

Soit $D = D(0,1)$ et soit $f, g \in \mathcal{O}(D)$ vérifiant $f(0) = g(0) = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n,\ g(z) = \sum_{n=1}^\infty b_n z^n.$$

1. Montrer que la série de terme général $f(z^n)$ est normalement convergente sur tout compact de D. On admettra le *principe du maximum*[1]. En déduire que les séries

$$F(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n g(z^n),\ G(z) = \sum_{n=1}^\infty b_n f(z^n),$$

   convergent normalement sur tout compact de D.

2. Déterminer le développement en série entière de F à l'origine et en déduire que $F = G$.

3. Soit log la détermination principale du logarithme. Montrer, pour $z \in D$:

$$\sum_{n=1}^\infty \log(1+z^n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{z^n}{1-z^n},$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{1+z^n} = \sum_{n=1}^\infty d(n)z^n,$$

   où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de l'entier $n \geqslant 1$.

1. Pour f holomorphe on a : Si $|f(z)| \leqslant A$ pour $|z| = r$ alors $|f(z)| \leqslant A$ pour $|z| \leqslant r$.