Analyse complexe, Exercices n° 4 :

Le principe du maximum

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 13 mars 2023

`Ce TD porte sur le principe du maximum, le lemme de Schwarz et les fonctions lacunaires. On corrigera les exercices 1-4-5-8-9-11.`

Principe du maximum

Exercice 1.

Soit $D = D(0,1)$ et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{D}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro dans D.

Exercice 2.

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $f_k(U) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Si $z \in U$, on pose :

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} |f_k(z)|^{\alpha_k}.$$

Montrer que, si g a un maximum relatif en un point $a \in U$, alors g est constante sur U.

Exercice 3. Variations du lemme de Schwarz

Soient $M \in \mathbb{R}_+$, $D = D(0,1)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(D)$.

1. Supposons que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D$. Montrer que pour tout $z \in D$ on a
$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{1-|z|}.$$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier non nul. Supposons que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et que $|f(z)| \leqslant M$, $\forall z \in D$. Montrer $|f(z)| \leqslant M|z|^k$ pour tout $z \in D$. Que peut-on dire s'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = M|a|^k$?
3. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D$. Montrer qu'on a
$$|f(z)| \leqslant M|z|,\ |f(z) - z| \leqslant (M+1)|z|^2,\ \forall z \in D.$$
4. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $|f'(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D$. Montrer qu'on a
$$|f'(z) - 1| \leqslant (M+1)|z|,\ |f(z)| \leqslant M,\ |f(z) - z| \leqslant \frac{M+1}{2}|z|^2,\ \forall z \in D.$$

Exercice 4. Théorème de Paley-Wiener

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $n \in \mathbb{N}$ un entier non-nul et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$. Posons $g(z) = |f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|$ pour tout $z \in U$.

1. Que peut on dire si g admet un maximum local en $a \in U$?
2. Supposons que $f_1, \dots, f_n$ ne s'annulent pas dans U et qu'il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $|h| = g$. Montrer qu'il existe $A_1, \dots A_n \in \mathbb{C}$ tels que $f_k = A_k h$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 5. Théorème des trois cercles d'Hadamard

Soient $r, R \in \mathbb{R}_+^\times$ tels que $r < R$ et $U \subset \mathbb{C}$. On suppose que $C \subset U$ où $C \coloneqq \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r \leqslant |z| \leqslant R\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Pour $r \leqslant \rho \leqslant R$, on pose :

$$M(\rho) \coloneqq \sup_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

Montrer que pour $r \leqslant \rho \leqslant R$ on a

$$M(\rho) \leqslant M(r)^{\frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}} M(R)^{\frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}}.$$

Exercice 6.

Soit $D = D(0,1)$, $f \in \mathcal{O}(D)$ tel que $f(0) = 1$ et $\Re f(z) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $z \in D$. On définit $g\colon D \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}.$$

1. Montrer $\Re f(z) > 0$ pour tout $z \in D$ puis montrer $|g(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$.
2. En déduire que, pour $z \in D$, on a :
$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$
3. Que peut-on dire s'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ pour lequel l'une ou l'autre des inégalités précédentes est une égalité ?

Exercice 7. Automorphismes du demi-plan

Pour $U \subset \mathbb{C}$ notons $\operatorname{Aut} U$ l'ensemble des automorphismes biholomorphes de U. Posons

$$D = D(0,1),\ \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}.$$

1. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ vérifiant $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \operatorname{Aut} D$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta}\mathrm{id}_D$.
2. Déterminer $\operatorname{Aut} D$.
3. Posons $h\colon D \to \mathbb{C}$ défini par
$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z},\ z \in D.$$
Montrer que h est une bijection de D sur $\mathbb{H}$ et donner sa bijection réciproque.
4. Déterminer $\operatorname{Aut} \mathbb{H}$.
5. Montrer que $\operatorname{Aut} \mathbb{H}$ est engendré par les transformations de la forme
$$z \longmapsto -\frac{1}{z},\ z \longmapsto z + a,\ z \longmapsto bz\ (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+^\times).$$

Exercice 8. Inégalité de Caratheodory

Soit f une fonction entière, i.e. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Pour $r \geqslant 0$, on pose

$$M(r) \coloneqq \sup_{|z|=r} |f(z)|,\ A(r) \coloneqq \sup_{|z|=r} |\Re f(z)|.$$

1. Justifier que M et A sont croissantes et continues sur $\mathbb{R}_+$ et que si f n'est pas constante, M et A sont strictement croissantes.
2. Supposons que $f(0) = 0$. Montrer $M(r) \leqslant 2A(2r)$.
3. Soient $M, N, a \in \mathbb{R}_+$. Supposons
$$\Re f(z) \leqslant M + N|z|^a,$$
dès que $|z|$ est assez grand. Montrer que f est un polynôme.

Fonctions lacunaires

Soit $D = D(0,1)$ et $f \in \mathcal{O}(D)$. On dit que f est *lacunaire* s'il n'existe pas d'ouvert connexe U tel que $D \subset U$ tel que f s'étende en une fonction holomorphe sur U. En d'autres termes, f est lacunaire si tous les points du bord de son disque de convergence sont singuliers, i.e. f ne s'y prolonge pas par continuation analytique. On va s'intéresser à deux théorèmes, appelés des « gap theorems » en anglais.

Exercice 9. Un exemple

Soit $a \geqslant 2$ un entier. Montrer que la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{a^n}$$

est lacunaire.

Exercice 10. Théorème d'Ostrowski-Hadamard

Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème d'Ostrowski-Hadamard

Soit $\lambda > 1$ un réel. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $p_{n+1} > \lambda p_n$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{p_n}$ ait rayon de convergence 1. Alors f est lacunaire.

1. On raisonne par contradiction : supposons qu'il existe un ouvert connexe U tel que $\overline{D} \subset U$ et tel que f se prolonge à U. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $1 \in U$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier non-nul. Posons $\psi_k \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ défini par $\psi_k(z) = \frac{1}{2}(z^k + z^{k+1})$. Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f \circ \psi_k$ définit une fonction holomorphe sur $D(0, 1+\varepsilon)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier non-nul tel que $\frac{k+1}{k} < \lambda$. En explicitant le développement en série entière de $f \circ \psi_k$ montrer que le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à $(1+\varepsilon)^k$.
4. Conclure.

Exercice 11. Théorème de Fabry et la méthode de Turán

Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème de Fabry

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante telle que $\lim \frac{p_n}{n} = \infty$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{p_n}$ ait rayon de convergence 1. Alors f est lacunaire.

1. Pour démontrer ce théorème, commencer par justifier la méthode de Turán :

   Théorème de Turán

   Soit $N \geqslant 1$ un entier. Soit $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $|z_i| \geqslant 1,\ \forall i = 1, \ldots, n$. Pour $\nu \in \mathbb{N}$ posons

   $$S_\nu = \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^\nu.$$

   Alors pour tout $M \in \mathbb{N}$ il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $M+1 \leqslant \nu \leqslant M+N$ tel que

   $$|s_\nu| \geqslant c(M,N)^{-1}|s_0|, \ \text{où } c(M,N) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k.$$

   De plus, cette constante est optimale, mais n'est jamais atteinte.

2. Montrer

   $$c(M,N) \leqslant \left(\frac{2e(M+N)}{N}\right)^{N-1}.$$

3. Soit $N \geqslant 1$ un entier. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{N}$ et $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$, posons une fonction sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, définie par le polynôme trigonométrique

   $$T(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \exp(2i\pi\lambda_n x).$$

Soit $I \subset \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un arc fermé de longueur L. Montrer

$$\max_{x\in I}|T(x)| \geqslant \left(\frac{L}{2e}\right)^{N-1} \max_{x\in\mathbb{T}}|T(x)|.$$

4. On se place dans les conditions du théorème de Fabry. Soit $r \in]0,1[$, montrer qu'il existe $C = C(r) \in \mathbb{R}_+^\times$ et $k_0 = k_0(f,r) \in \mathbb{N}$ tels que pour tout entier $k > k_0$ on a

$$\sum_{n\geqslant Ck} \binom{n}{k} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^{n-k} < 1.$$

5. Montrer le théorème de Fabry.