Analyse complexe, Exercices n^{o} 5 :

Suites de fonctions

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 26 mars 2023

`Ce TD porte sur les produits infinis et les espaces de fonctions analytiques. On corrigera les exercices 1-4-5-6-7-10. Pour les exercices 8 et 9, on admettra le` *`théorème de Rouché`*`.`

Produits infinis

Exercice 1. Produits de Blaschke

Soit $D = D(0,1)$. Rappelons que pour $a \in D$, on définit le *facteur de Blaschke*, $\varphi_a : D \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ \forall z \in D.$$

1. Justifier que φ_a définit une bijection holomorphe $\varphi_a : D \to D$, d'inverse φ_{-a}, puis qu'elle se prolonge en une fonction continue au bord du disque.
2. Soit $\varphi : D \to D$ une fonction analytique telle que $\varphi(0) = 0$. Pour $w \in D \setminus \{0\}$ on définit la *fonction de comptage de Nevanlinna* par
$$N_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} \log\left(\frac{1}{|z|}\right).$$
Montrer *l'inégalité de Littelwood* : $N_\varphi(w) \leqslant \log(1/|w|)$.
3. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique bornée et non identiquement nulle. Soit $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité. Montrer
$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-|z_j|) < \infty.$$
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $D \setminus \{0\}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty$. Montrer que le produit infini
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n}\varphi_{z_n},$$
converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction analytique B qui est bornée en norme par 1. La fonction B est appelée le *produit de Blaschke* associé à la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts de D telle que $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|) = \infty$. Montrer que le produit $\prod_{n=0}^{\infty}\varphi_{z_n}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de D.
6. Soit $F \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ un fermé. À l'aide des produits de Blaschke, construire une série entière de rayon de convergence 1 dont la somme se prolonge analytiquement au voisinage de chaque point de $\mathbb{U} \setminus F$ et ne se prolonge analytiquement au voisinage d'aucun point de F.

Exercice 2. Valeur interdite des produits d'Euler

Une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est dite *complètement multiplicative* si $f(1) = 1$ et si pour tout $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a $f(mn) = f(n)f(m)$. On notera $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Soit $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction complètement multiplicative sommable. Montrer
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-f(p)}.$$
2. Justifier que pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1 \implies \zeta(s) \neq 0$ où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ est la *fonction zêta de Riemann*.
3. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ complètement multiplicative et sommable telle que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = w$.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 3. Théorème de Lommel

Soit

$$J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

la *fonction de Bessel d'indice zéro*. Le but de cet exercice est de montrer que J_0 a une infinité de zéros qui sont tous réels[1].

1. Après avoir justifié que J_0 définit une fonction entière, montrer que pour toute fonction entière $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ solution de l'équation différentielle $zy'' + y' + zy = 0$, on a $y = y(0)J_0$.
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ des zéros de J_0. Montrer $(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)dx = 0$.
3. En appliquant ce qui précède à $\beta = \bar{\alpha}$, montrer que les zéros de J_0 sont tous réels.
4. Montrer $\forall z \in \mathbb{C},\ |J_0(z)| \leqslant e^{|z|}$.
5. Conclure que J_0 a une infinité de zéros.

Espace des fonctions analytiques

Exercice 4. Un espace non complet

Soit $D = D(0,1)$ et soit $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{O}(D)$ définie par $\|f\| := \sup_{|z|\leqslant 1/2}|f(z)|$. Montrer que $(\mathcal{O}(D), \|\cdot\|)$ n'est pas un espace complet.

Exercice 5. Somme des modules bornée implique convergence normale

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(U)$ une suite de fonctions tel qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\times$ tel que $\forall z \in U,\ \sum_{n=0}^{\infty}|f_n(z)| \leqslant M$. Montrer que $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout compact de U. Ce résultat est-il vrai pour les fonctions continues sur un segment ?

Exercice 6. Une suite pas sans intérêts

On définit pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction $f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ donnée par $\forall z \in \mathbb{C},\ f_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et déterminer sa limite.

Exercice 7. L'algèbre du disque

Cet exercice fait suite à l'exercice 1. Soit $D = D(0,1)$ le disque unité et $\mathcal{A}(D)$ *l'algèbre du disque unité*. C'est l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes sur D et continues sur $\overline{D}$ munie de la norme sup : $\|f\| = \sup_{z\in D}|f(z)|$.

1. Justifier que les polynômes sont denses dans $\mathcal{A}(D)$.
2. Une fonction $u \in \mathcal{A}(D)$ est dite *unimodulaire* si $|z| = 1 \implies |u(z)| = 1$. Montrer que les unimodulaires sont exactement les produits de Blaschke finis.
3. Montrer que la boule unité fermée de $\mathcal{A}(D)$ est l'enveloppe convexe fermée des produits de Blaschke finis.

Exercice 8. Une partie compacte

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit $a \in U$. Notons $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(U)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(U)$ injectifs s'annulant en a et tels que $\forall z \in U,\ |f(z)| < 1$. Montrer que $\mathcal{H} \cup \{0\}$ est une partie compacte de $\mathcal{O}(U)$.

Exercice 9. Une partie bornée

Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts tels que U est connexe et $\overline{V} \neq \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(U)$ une partie des fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $\overline{V}$. Supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $\{f(a)\ ;\ f \in \mathcal{H}\} \subset \mathbb{C}$ est une partie bornée. Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(U)$.

Exercice 10. Contre-exemple pour Runge

Soient $D = D(0,1)$ et $f \in \mathcal{O}(D)$.

1. Soit $K \subset D$ un compact. Montrer qu'il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur K.
2. Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur D ?

[1]. Ce résultat est valable pour les fonctions de Bessel J_n (cf. TD1) par la même méthode.