Analyse complexe, Exercices n^{o} 6 :

Fonctions méromorphes

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 3 avril 2023

`Ce TD porte sur les fonctions méromorphes, entières et le théorème des résidus. On corrigera les exercices 1-3-4-6`

Fonctions entières et méromorphes

Exercice 1. Théorème de Casorati-Weierstrass

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière qui n'est pas constante.

1. Donner un exemple d'une telle fonction f à la fois surjective, localement inversible mais non injective.
2. Montrer que l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que f atteint au moins une valeur réelle positive.

Exercice 2. Théorème de Mittag-Leffler

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe et soit $a \in \mathbb{C}$. Alors, au voisinage de a, f s'écrit

$$f(z) = \sum_{n \geqslant N} a_n (z-a)^n,$$

avec $N \in \mathbb{Z}$. On appellera $\sum_{0>n\geqslant N} a_n(z-a)^n$ la *partie principale de f en a*. Le but de l'exercice est de montrer qu'en se donnant des parties principales en des points de $\mathbb{C}$, on peut reconstruire une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ admettant exactement ces parties principales.

1. Soit $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ holomorphe dans $D(0,R)$ avec $R > 0$. Montrer que pour $|z| < r < R$ et $N \geqslant 1$ un entier on a
$$\sum_{k=N}^{\infty} c_k z^k = \frac{z^N}{2i\pi} \int_{|w|=r} \frac{F(w)}{w^N (w-z)} dw.$$
2. En posant $M(r) \coloneqq \sup_{|z|=r} |F(z)|$, montrer :
$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} c_k z^k \right| \leqslant \left(\frac{|z|}{r} \right)^N \frac{rM(r)}{r-|z|}, \quad \left| \sum_{k=N}^{\infty} c_k z^k \right| \leqslant 2^{-N+1} M(r), \text{ si } |z| \leqslant \frac{r}{2}.$$
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts tendant vers l'infini et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers non nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n(z) = \sum_{k=1}^{l_n} c_{k,n} (z-z_n)^{-k}$ une partie principale en z_n. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ telle que sa partie principale en chaque z_n est précisément f_n.

Exercice 3. Équation de Guichard

Soit D et Δ les opérateurs de dérivation et de dérivation discrète sur les fonctions entières, i.e. pour $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ on pose

$$(Df)(z) = f'(z), \ (\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z).$$

1. Montrer que $D \colon \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est surjective. Dans la suite, on se propose de montrer qu'il en est de même pour Δ. On va commencer par montrer que les polynômes sont dans l'image.
2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelés *polynômes de Bernoulli*, tels que $B_0 \equiv 1$, $\deg B_n = n$ et vérifiant
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \ (\Delta B_n)(z) = nz^{n-1}$,
   (b) $\frac{te^{zt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \frac{t^n}{n!}$,
   (c) $B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|t|=\pi} \frac{te^{tz}}{(e^t-1)t^{n+1}} dt$.
3. Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Résoudre *l'équation de Guichard*, i.e. qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tel que $\Delta f = g$.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Théorème des résidus

Exercice 4. Calcul d'intégrales

Par la méthode des résidus, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n}\ (n\in\mathbb{N},\ n>1),\ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^4}dt,\ \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{x}dx,\ \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}dx,\ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx\ (a\in]0,1[)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1},\ \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2e^x}{1+e^{2x}}dx,\ \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin x}{x}dx,\ \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}dx\ (a,b\in\mathbb{R}_+^\times).$$

Exercice 5. Théorème de von Dantzig

1. Soit $a\in]0,1[$, montrer
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt}\frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi t)+\cos(\pi a)}dt = 2\frac{\sinh(2\pi ax)}{\sinh(2\pi x)}.$$
2. En déduire que la fonction $f(t)=\frac{1}{\cosh(\pi t)}$ est sa propre transformée de Fourier.

Exercice 6. Calcul de sommes de séries

Soit $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$, que l'on suppose de degré $\leqslant -2$ et sans pôles en les entiers. Le but de cet exercice est de calculer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$.

1. Soit $N\geqslant 1$ un entier. Soit $\gamma_N\colon [0,1]\to\mathbb{C}$ le bord orienté du carré centré en 0 de coté de longueur $2N+1$. Soit $z\in \operatorname{im}\gamma_N$, montrer $|\operatorname{cotan}(\pi z)|\leqslant M$ avec $M\geqslant 0$ une constante réelle. En déduire
$$\lim_{N\to\infty}\int_{\gamma_N} f(z)\operatorname{cotan}(\pi z)dz = 0.$$
2. Soit $a_1,\dots,a_p$ les pôles de f comptés avec leur multiplicité, montrer
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = -\pi\sum_{j=1}^p \operatorname{Res}(f,a_j)\operatorname{cotan}(\pi a_j).$$
3. En déduire que pour $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ on a
$$\pi\operatorname{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a}+\sum_{n=1}^\infty \frac{2a}{a^2-n^2}.$$
4. Montrer que les solutions de l'équation $\tan z = z$ sont toutes réelles. On notera $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ les solutions réelles strictement positives numérotés dans l'ordre croissant.
5. Montrer $\sum_n^\infty \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10}$.
6. Montrer
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2\sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3-3a}{20}.$$

Exercice 7. Encore une somme de série

Soient $a,b\in\mathbb{R}_+^\times$ tel que $\theta=a/b$ est irrationnel. Posons la fonction méromorphe $f(z)=\frac{1}{z^3\sin(\pi az)\sin(\pi bz)}$.

1. Soit $n\in\mathbb{Z}$ un entier non nul. Calculer $\operatorname{Res}(f,\frac{n}{a})$, $\operatorname{Res}(f,\frac{n}{b})$ et $\operatorname{Res}(f,0)$.
2. Montrer qu'il existe une suite $(r_N)_{N\geqslant 1}$ de réels strictement positifs tendant vers l'infini telle que $\inf_{n\in\mathbb{Z}}\left|r_n-\frac{n}{a}\right|\geqslant d$ et $\inf_{n\in\mathbb{Z}}\left|r_n-\frac{n}{b}\right|\geqslant d$ où $d>0$ ne dépend pas de N.
3. Soit $\gamma_N\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ le carré de coté $2r_N$ centré en 0. Montrer qu'il existe une constante $\delta>0$ tel que
$$z\in\operatorname{im}\gamma_N \implies |\sin(\pi az)|\geqslant\delta,\ |\sin(\pi bz)|\geqslant\delta.$$
4. Montrer
$$\lim_{N\to\infty}\left(\theta^2\sum_{1\leqslant n<ar_N}\frac{(-1)^n}{n^3\sin(n\pi/\theta)}+\sum_{1\leqslant n<br_N}\frac{(-1)^n}{n^3\sin(n\pi\theta)}\right) = \frac{-\pi^3}{720}(7\theta^3+\frac{7}{\theta}+10\theta).$$
5. En déduire
$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^3\sin(n\pi\sqrt{2})} = \frac{-13\sqrt{2}\pi^3}{720}.$$