# Analyse complexe, Exercices n° 7 :

# Représentations conformes

Arnaud Vanhaecke [0]

*Dernière mise à jour* : 25 avril 2023

---

```
Ce TD porte sur le théorème de représentation conforme de Riemann et les espaces de Hilbert de fonctions
analytiques. On ne corrigera pas cette feuille en TD
```

## Représentations conformes

### Exercice 1. Exemples de représentations conformes

On notera $D = D(0,1)$, $\mathbb{C}_0 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$, $S_\alpha \coloneqq \{z \in \mathbb{C}_0 \mid |\arg z| < \alpha\}$ où $0 < \alpha < \pi$ et $A(r,R) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ ou $0 < r < R$. Montrer les affirmations suivantes

1. La transformation $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ est une représentation conforme de $D$ sur $\mathbb{C}_0$.
2. La fonction $z \mapsto z^\beta$ est, pour $0 < \alpha\beta \leqslant \pi$ une représentation conforme de $S_\alpha$ sur $S_{\alpha\beta}$.
3. La *transformation de Koebe* $z \mapsto K(z) \coloneqq \frac{z}{(1-z)^2}$ est une représentation conforme de $D$ sur $\mathbb{C}\backslash ]-\infty, -1/4]$.
4. La transformation $z \mapsto L(z) \coloneqq \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ est une représentation conforme de $D$ sur $\{w \in \mathbb{C} \mid |\Im w| < \pi/2\}$.
5. La *transformation de Joukowski* $z \mapsto J(z) \coloneqq \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est une représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

### Exercice 2. Approximation polynomiale de Bernstein

Soit $I = [-1,1]$, on notera $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes continues sur $I$ et soit $\mathcal{P}_n \subset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$ l'espace des polynômes de degrés au plus $n$. Enfin si $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$ on définit

$$E_n(f) \coloneqq \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_I$$

où $\|g\|_I \coloneqq \sup_{x \in I} |g(x)|$. Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$ et $\rho > 1$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\limsup_{n\to\infty} (E_n(f))^{1/n} \leqslant \rho^{-1}$.

(ii) La fonction $f$ possède un prolongement analytique dans l'intérieur d'une ellipse, plus précisément dans

$$O_\rho \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < \rho + \rho^{-1}\}.$$

On utilisera la transformation de Joukowski pour démontrer cette équivalence.

### Exercice 3. Polynômes de Faber

Soit $K$ un connexe du plan ayant au moins deux points et tel que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ soit connexe.

1. Montrer que $\Omega$ est conformément équivalent à $D(0,1) \setminus \{0\}$ ou a $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$.
2. Expliciter une telle représentation conforme dans le cas où $K = ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.
3. Notons $\Phi \colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$ la représentation conforme conforme obtenue. Montrer que $\Phi$ a un pôle simple à l'infini. On définit alors le *n-ième polynôme de Faber associé à* $K$, $F_n$ comme étant la partie polynomiale de $\Phi^n$ i.e.
$$F_n(z) = \Phi(z)^n + O_\infty(1/z).$$
4. Montrer que les polynômes de Faber de $K = ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ sont $F_n = 2T_n$ où $T_n$ est le $n$-ième polynôme de Tchebychev de la première espèce.
5. Soit $\Psi$ l'application réciproque de $\Phi$. Montrer
$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}},\ |w| > 1 + \varepsilon,\ z \in K.$$
6. Si $U$ est un ouvert contenant $K$ supposé connexe et si $f \in \mathcal{O}(U)$, montrer que $f$ se développe sur $K$ en série de polynômes de Faber associés à $K$ et que cette série converge uniformément sur $K$.

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

**Exercice 4. Équivalence conforme de couronnes**

On définit $A(r,R) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$. Montrer que $A(r_1,R_1)$ et $A(r_2,R_2)$ sont conformément équivalentes si et seulement si $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.

# Espaces de Hilbert de fonctions analytiques

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide. On définit un *espace de Hilbert de fonctions analytiques sur* $\Omega$ comme un espace de Hilbert qui s'injecte continument $j\colon H \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ pour $\mathcal{O}(\Omega)$ muni de la topologie de Fréchet. Dans ce cas, pour tout $a \in \Omega$, la masse de Dirac $\delta_a\colon H \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_a(f) = f(a)$ est une forme linéaire continue [1]. On notera $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ le produit scalaire sur $H$ et $H^*$ le dual de $H$.

**Exercice 5. Noyau reproduisant**

Soit $H$ un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur $\Omega$.

1. Montrer que pour tout $a \in \Omega$ il existe une unique fonction $K_a \in H$ telle que $\delta_a = \langle\,\cdot\,, K_a\rangle$ et $\|\delta_a\|_{H^*} = \|K_a\|_H$. En déduire que $(z,a) \mapsto K_a(z)$ est analytique en $z$ et anti-analytique en $a$. On appelle cette fonction le *noyau reproduisant* de $H$.
2. Montrer. que $H$ est séparable
3. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormale de $H$. Montrer $K_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(a)}$ où la série converge dans $H$.
4. Montrer $\|K_a\|^2 = K_a(a)$. Montrer $\sup_{a\in L}\|K_a\| < \infty$ pour tout compact $L \subset \Omega$.
5. Montrer que l'application $a \mapsto K_a$, $\Omega \to H$ est continue.

**Exercice 6. Espaces de Hardy**

L'espace de Hardy $H^2$ est l'espace des fonctions $f$ analytiques sur $D = D(0,1)$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telles que

$$\|f\|_2^2 \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

De même, on introduit des espaces de Hardy non hilbertiens $H^\infty$, $H^1$. L'espace $H^\infty$ est l'espace des fonctions analytiques bornées sur $D$ avec la norme sup. L'espace $H^1$ est l'espace des fonctions $f$ analytiques sur $D$ telles que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(t)|dt \eqqcolon \|f\|_1 < \infty,$$

où $f_r$ est la fonction sur le cercle donnée par $f_r(t) = f(re^{it})$ où $r \in ]0,1[$.

1. Montrer que l'évaluation en $a \in D$ est une forme linéaire continue sur $H^2$ et calculer le noyau reproduisant $K_a(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z}$.
2. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$. Montrer que $f \in H^2$ si et seulement si les $f_r$ sont bornées dans $L^2([0,2\pi])$ et
$$\|f\|_2^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2 dt < \infty.$$
En déduire que $(1-z)^{-\alpha} \in H^2 \iff \Re\alpha < 1/2$.
3. Soit $g \in H^\infty$, montrer $f \in H^2 \implies fg \in H^2$ avec $\|fg\|_2 \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_\infty$. On dit que $H^\infty$ est l'espace des multiplicateurs de $H^2$.
4. Soit $f \in H^1$ et soient $0 < r < s < 1$, montrer $\|f_r\|_1 \leqslant \|f_s\|_1$. On utilisera l'égalité de convolution $f_r = f_s * P_{r/s}$ où $P_{r/s}$ est le noyau de Poisson d'indice $r/s$.
5. Soit $f \in H^1$ non identiquement nulle, de zéros $(z_n)_{n\geqslant 1}$ comptés avec leur multiplicité, ordonnés par ordre croissant de module. Alors la condition de Blaschke est encore vérifiée, i.e.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty.$$
6. Si $f \in H^1$ non identiquement nul, de produit de Blaschke associé $B$ (i.e. le produit infini de Blaschke associé à la suite de zéros de $f$). Montrer $f/B \in H^1$ et $\|f\|_1 = \|f/B\|_1$.
7. Montrer le *théorème de Hardy* : soit $f \in H^1$. Alors, il existe $g, h \in H^2$ telles que $f = gh$ et $\|f\|_1 = \|g\|_2 \cdot \|h\|_2$.

1. Apparemment cette dernière implication est une équivalence.

**Exercice 7. Espace de Bergman**

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, on définit *l'espace de Bergman* $B^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques $f$ analytiques dans $\Omega$ telles que

$$\|f\|_B^2 := \int_\Omega |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty.$$

Ceci munit l'espace de Bergman d'une structure préhilbertienne. On notera $B^2 = B^2(D)$ où $D = D(0,1)$.

1. Soit $L$ un compact de $\Omega$ et $r = \operatorname{dist}(L, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Monter que pour tout $f \in B^2(\Omega)$ on a

$$\sup_{a \in L} |f(a)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_B.$$

   En déduire que $B^2(\Omega)$ est complet : donc c'est un espace de Hilbert. Le noyau reproduisant de $B^2(\Omega)$ est appelé le *noyau de Bergman* de $\Omega$.

2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in B^2$, montrer

$$\|f\|_B^2 = \pi \sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

   En déduire que le noyau reproduisant de $B^2$ est $K_a(z) = \frac{1}{\pi(1-\bar{a}z)^2}$.

3. Soit $\varphi \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ une transformation conforme et soient $K_1(z,a)$, $K_2(z,a)$ les noyaux de de Bergman respectifs. Montrer

$$K_1(z,a) = K_2(\varphi(z), \varphi(a)) \varphi'(z) \overline{\varphi'(a)}.$$

4. Soit $\Omega$ un domaine simplement connexe autre que $\mathbb{C}$, soit $a \in \Omega$ et soit $\varphi \colon \Omega \to D$ la transformation conforme telle que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) > 0$. Alors,

$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(a,a)}} K(z,a).$$

5. L'espace de Hardy $H^1$ s'injecte $\sqrt{\pi}$-contractivement dans l'espace de Bergman $B^2$. Plus précisément montrer $f \in H^1 \implies f \in B^2$ avec $\|f\|_B \leqslant \sqrt{\pi}\|f\|_1$ et qu'on a égalité des normes si et seulement si $f$ est un multiple d'un noyau reproduisant de l'espace de Bergman $B^2$.

**Exercice 8. Inégalité isopérimétrique**

Comme application des deux exercices précédents, on se propose de montrer l'inégalité isopérimétrique. Soit $J$ la courbe de Jordan rectifiable d'intérieur $\Omega$. Notons $S$ l'aire de $\Omega$ et soit $L$ la longueur de $J$. On veut montrer qu'on a $L^2 \geqslant 4\pi S$, l'égalité ayant lieu lorsque $J$ est un cercle parcouru une fois. On utilisera $f \colon D \to \Omega$ une représentation conforme de $\Omega$.

1. Montrer $f' \in H^1$ et $\|f'\|_1 = \frac{L}{2\pi}$.
2. Montrer $f' \in B^2$ et $\|f'\|_B^2 = S$.
3. En déduire l'inégalité isopérimétrique.

**Exercice 9. Espace de Dirichlet**

L'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ du disque unité est l'espace des fonctions $f$ analytiques sur $D$ telles que

$$D(f) := \frac{1}{\pi} \int_D |f'(z)|^2 dA(z) < \infty$$

où $dA$ désigne la mesure d'aire. On norme alors $\mathcal{D}$ par $\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + D(f)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer $f \in \mathcal{D} \iff f' \in B^2$.
3. Montrer que $e_0(z) = 1$, $e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$ définit une base orthonormale de $\mathcal{D}$. En déduire que le noyau reproduisant de $\mathcal{D}$ est donné par $K_a(z) = 1 - \log(1 - \bar{a}z)$.