Analyse complexe, Exercices n° 8 :

Fonctions entières

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : 19 mai 2023

```
Ce TD porte sur les fonctions entières, en particulier sur les produits de Weierstrass et deux applications.
On corrigera les exercices 1-5.
```

Produits de Weierstrass

Exercice 1. Produits de Weierstrass généraux

On définit $W_0(z) \coloneqq 1 - z$ et si $p \geqslant 1$ est un entier on pose $W_p(z) \coloneqq (1-z)\exp\left(z + \frac{z}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$ appelés les *facteurs de Weierstrass*, qui définissent des fonctions entières qui admettent un zéro simple en 1.

1. Montrer que que si $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ alors $|\log W_p(z)| \leqslant \frac{2|z|^{p+1}}{p+1}$.
2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|z_n| \leqslant |z_{n+1}|$ et $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Alors il existe une fonction entière P dont les zéros sont les z_n comptés avec multiplicité. On construira cette fonction à partir d'un produit de W_p bien choisis : ce produit est appelé *produit de Weierstrass.*
3. Soit f une fonction entière non nulle. Alors il existe $d \in \mathbb{N}$, P un produit de Weierstrass et h une fonction entière tel qu'on ait la factorisation $f(z) = z^d P(z) e^{h(z)}$.
4. Montrer que toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est le quotient de fonctions holomorphes.

Exercice 2. Fonctions Bêta et Gamma

À l'aide de l'exercice précédent, on se propose de démontrer quelques identités.

1. Montrer $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$. où γ est la constante d'Euler et $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$.
2. Soit $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\Re p > 0$ et $\Re q > 0$, on définit la *fonction Bêta* par
$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$
Montrer $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ puis en déduire la *formule des compléments* : $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ pour $p \notin \mathbb{Z}$.
3. Montrer *l'approximation de Stieltjes* :
$$\Gamma(z) = \left(\frac{z}{e}\right)^z \left[\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} + O(z^{-3/2})\right]$$
lorsque $|z| \to \infty$ uniformément dans tout secteur $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \leqslant \pi - \delta\}$ pour $\delta > 0$.

Exercice 3. La formule de Jensen

Soit f une fonction entière telle que $f(0) \neq 0$. Pour $s \in \mathbb{R}_+$ on note $n(s)$ le nombre de zéros de f de module $\leqslant s$, comptés avec multiplicités et $M(r) \coloneqq \sup_{|z|=r}|f(z)|$.

1. Notons $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les zéros de f comptés avec multiplicités de sorte que $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$. Montrer que pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|z_n| \leqslant r \leqslant |z_{n+1}|$ on a
$$\log\left(\frac{|f(0)|r^n}{|z_1 z_2 \cdots z_n|}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$
2. En déduire la *formule de Jensen* : pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ on a
$$\log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(s)}{s}ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$
3. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $n(r) \leqslant \frac{\log M(2r)}{\log 2} + C$.

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 4. Fonctions d'ordre fini

On dit qu'une fonction entière f est d'*ordre fini* s'il existe une constante C et ρ telle que $|f(z)| = O\left(e^{C|z|^\rho}\right)$ lorsque $|z| \to \infty$. L'*ordre* de f est alors l'infimum des ρ tels que la borne précédente est vraie.

1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < |z_n| \leqslant |z_{n+1}|$ et $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} < \infty,$$
et prenons le plus petit entier p tel que la série précédente converge. Justifier que le produit de Weierstrass $P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} W_p\left(\frac{z}{z_n}\right)$ converge uniformément sur tout compact et montrer que P est d'ordre $p+1$. On appelle alors P le *produit canonique* pour la suite de zéros $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et p le *genre* du produit.

2. Soit f une fonction entière d'ordre ρ et soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses zéros non-nuls arrangés dans l'ordre croissant. Montrer que pour tout $\sigma > \rho$ on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\sigma}} < \infty.$$

3. Montrer le *théorème de factorisation d'Hadamard* : soit f une fonction entière d'ordre ρ alors f se factorise en $f(z) = z^d P(z) e^{Q(z)}$ où P est le produit canonique associé au zéros de f et Q est un polynôme de degré $n \leqslant \rho$.

4. Déterminer le produit d'Hadamard du sinus et du cosinus

Applications

Exercice 5. Factorisation d'Hadamard de la fonction ξ de Riemann

Posons $\xi(s) = \frac{s(1-s)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ où ζ est le prolongement de la fonction de la fonction zêta de Riemann.

1. Montrer que ξ est une fonction entière et que $\xi(s) = \xi(1-s)$.

2. Montrer que ξ est d'ordre 1.

3. Montrer la factorisation d'Hadamard $\xi(s) = \xi(0)\prod_{\xi(\rho)=0}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$.

Exercice 6. Corde vibrante inhomogène

Le contexte physique est celui d'une corde vibrante dans l'intervalle $[0,1]$dont la densité est caractérisée par une fonction $m\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$. Supposons qu'il existe $M_0, M_1 \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 < M_0 \leqslant m(x) \leqslant M_1$. L'équation de la corde s'écrit alors $\partial_x^2 u(x,t) = m(x)\partial_t^2 u(x,t)$. En séparant les variables on se ramène alors à l'équation $\varphi''(x) = \lambda m(x)\varphi(x)$ avec comme condition au bord $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une suite de solutions $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ avec $\lambda_n \to -\infty$. Les solutions propre de l'équation de départ sont alors de la forme $u_a(x,t) = \cos(\sqrt{|\lambda_n|}t - a)\varphi_n(x)$ pour $a \in [0, 2\pi[$. Si on veut des solutions continues, on doit mettre l'équation d'onde stationnaire sous la forme intégrale.

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation intégrale
$$\varphi(x) = a + bx + \lambda \int_0^x \int_0^t m(s)\varphi(s)dsdt$$
admet au plus une solution continue. Justifier que si φ est lisse alors l'équation intégrale est équivalente à l'équation des ondes stationnaire.

2. Montrer que les valeurs λ telles que l'équation intégrale précédente a une solution non nulle forment une suite infinie $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, $\lambda_n \to -\infty$ et telle que pour tout $\varepsilon > 0$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{1/2+\varepsilon}} < \infty.$$

3. Montrer l'encadrement $-\frac{(n\pi)^2}{M_0} \leqslant \lambda_n \leqslant -\frac{(n\pi)^2}{M_1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On remarquera que les valeurs limites correspondent aux λ dans le cas où la corde est homogène, i.e. $m(x)$ est constant.