Analyse complexe, Exercices n^o 9 :

Fonctions elliptiques et formes modulaires

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 22 mai 2023

`Ce TD porte sur les formes modulaires, les fonctions elliptiques et les fonctions thêta.`

Fonctions elliptiques

Exercice 1. Formule d'addition

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau et soit $\wp$ la fonction $\wp$ de Weierstrass associée. Notons de plus, pour $n \geqslant 3$ un entier, la série d'Eisenstein

$$G_n = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-n}.$$

1. Justifier que la série G_n converge absolument et que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} z^{2n}.$$

2. Soit $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $z+w, z-w, z, w \notin \Lambda$ montrer la *formule d'addition*

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right]^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

3. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $2w \notin \Lambda$ montrer la *formule de dédoublement*

$$\wp(2w) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}\right]^2 - 2\wp(w).$$

4. Notons $g_2 = 60G_4$ et $g_3 = 140G_6$, en déduire

$$\wp(2w) = \frac{(\wp^2(w) + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3\wp(w)}{4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3}.$$

Exercice 2. Fonction sigma et zêta de Weierstrass

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. On définit la *fonction sigma de Weierstrass associée au réseau*

$$\sigma(z) \coloneqq z \prod_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right).$$

et la fonction zêta de Weierstrass associée au réseau $\zeta(z) \coloneqq \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ qui est la dérivée logarithmique de $\sigma(z)$.

1. Montrer que σ est une fonction entière qui admet des zéros simples en les points de Λ.
2. Montrer $\zeta'(z) = -\wp(z)$.
3. Montrer que pour tout $\omega \in \Lambda$ il existe $a(\omega), b(\omega) \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma(z+\omega) = e^{a(\omega)z + b(\omega)}\sigma(z)$.
4. Montrer le *théorème d'Abel* qui assure qu'il existe une fonction elliptique dont les zéros modulo Λ sont $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et les pôles modulo Λ sont $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ si et seulement si on a

$$a_1 + \cdots + a_n \equiv b_1 + \cdots + b_n \mod \Lambda.$$

5. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ et posons $\eta_i = \zeta(z + \omega_i) - \zeta(z)$ pour $i = 1, 2$. Justifier que ce sont des constantes et montrer la *relation de Legendre* :

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi.$$

6. Pour $z, a \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ montrer les relations

$$\wp(z) - \wp(a) = \frac{\sigma(z+a)\sigma(z-a)}{\sigma(z)^2\sigma(a)^2}, \ \wp'(a) = -\frac{\sigma(2a)}{\sigma(a)^4}.$$

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/tdcan.html` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 3. Formes de Riemann

On s'intéresse aux applications $\mathbb{R}$-bilinéaires alternées de la forme $A\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une telle application est de la forme $A(z,w) = h\Im(z\bar{w})$ pour un unique réel $h \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ est un réseau avec $\Im(\omega_1/\omega_2) > 0$ on dira que A est une *forme de Riemann* pour Λ si elle prend des valeurs entières sur $\Lambda\times\Lambda$. Montrer que la formule
$$A(t_1\omega_1 + t_2\omega_2, s_1\omega_1 + s_2\omega_2) = \det\begin{pmatrix} t_1 & s_1 \\ t_2 & s_2 \end{pmatrix},$$
définit une forme de Riemann pour Λ.
3. On dit qu'une fonction entière Θ est une *fonction thêta* pour Λ si pour tout $\omega\in\Lambda$ il existe $a(\omega), b(\omega) \in \mathbb{C}$ tel que $\Theta(z+\omega) = e^{a(\omega)z+b(\omega)}\Theta(z)$. Par exemple la fonction sigma est une fonction thêta. Montrer qu'il existe une forme de Riemann A pour Λ telle que
$$A(\omega,\lambda) = \frac{1}{2i\pi}(a(\omega)\lambda - \omega a(\lambda)).$$
4. Pour $\tau\in\mathbb{C}$ tel que $\Im\tau > 0$ on définit le réseau $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$ et la *série thêta* associée par
$$\vartheta(\tau,z) \coloneqq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)}.$$
Montrer que cette série définit une fonction thêta ayant exactement un zéro modulo Λ_τ en $\frac{1+\tau}{2}$.

Formes modulaires

Exercice 4. Le groupe modulaire

On note $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ le *groupe modulaire* que l'on fait agir sur le *demi-plan de Poincaré* $\mathbb{H} \coloneqq \{z\in\mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ par homographie
$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \tau\in\mathbb{H},\ g\cdot\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}.$$

1. Montrer que $P = \{z\in\mathbb{H} \mid |\Re z| \leqslant 1/2,\ |z|\geqslant 1\}$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ.
2. Montrer que Γ est engendré par
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Calculer le stabilisateur des points de P. Un point $p\in\mathbb{H}$ est dit *elliptique* si son *ordre*, défini par $e(p) = \frac{1}{2}\operatorname{Card}(\Gamma_p)$, est > 1. Montrer que $g\in\Gamma$ admet un point fixe dans $\mathbb{H}$, alors unique, si et seulement si $|\mathrm{tr}(g)| < 2$.
4. Montrer qu'on a un homéomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$.
5. Montrer que les classes d'équivalence de réseaux $\Lambda\subset\mathbb{C}$ sont en bijection avec $\mathbb{H}/\Gamma$.

Exercice 5. Formes et fonctions modulaires

Une *forme modulaire méromorphe* de poids $k\in\mathbb{Z}$ est une fonction méromorphe f sur $\mathbb{H}$ vérifiant

(a) $f(g\cdot\tau) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$,

(b) il existe une constante $C > 0$ tel que $f(\tau)$ n'a pas de singularité dans le domaine $\Im\tau > C$,

(c) f n'a pas de singularité essentielle en $i\infty$.

On dira que c'est une *forme modulaire* si c'est une fonction entière vérifiant (a) et bornée dans les domaines de la forme $\Im\tau > C$. On dira que c'est une *fonction modulaire* si c'est une forme modulaire méromorphe de poids 0.

1. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$ vérifiant (b) et (c). Justifier que c'est une forme modulaire méromorphe de poids k si et seulement si $f(\tau+1) = f(\tau)$ et $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$.
2. Montrer que toute forme modulaire méromorphe de poids impaire est nulle.

3. Justifier que G_{2k} est une forme modulaire de poids $2k$ et montrer $\lim_{\Im\tau\to\infty} G_k(\tau) = 2\zeta(k)$.

4. Posons $g_2 = 60G_4$ et $g_3 = 140G_6$ comme précédemment. Montrer que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ est une forme modulaire de poids 12 et montrer $\lim_{\Im\tau\to\infty} \Delta(\tau) = 0$. C'est la *forme discriminant*. Une forme modulaire comme Δ qui s'annule en $i\infty$ est appelée *parabolique*.

5. Soit $j = g_2^3/\Delta$ *l'invariant* j. Montrer que c'est une fonction modulaire telle que $\lim_{\Im\tau\to\infty} j(\tau) = \infty$.

6. Montrer que j est surjective et en déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 - 27b^2 \neq 0$ il existe un réseau $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $a = g_2(\tau)$, $b = g_3(\tau)$. Comment interpréter ce résultat géométriquement ?

Exercice 6. Formule $k/12$

1. Montrer qu'une forme modulaire de poids négatif est nulle.

2. Montrer qu'une forme modulaire méromorphe non nulle à un nombre fini de zéros et de pôles modulo Γ.

3. Soit f une forme modulaire de poids $k \in \mathbb{N}$. Montrer la *formule* $k/12$:
$$\sum_p \frac{1}{e(p)} \operatorname{ord}_p(f) + \operatorname{ord}_{i\infty}(f) = \frac{k}{12}.$$

4. Montrer qu'une forme modulaire de poids 0 est nulle.

5. Montrer qu'une forme modulaire a au moins un zéro dans $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$.

6. Montrer qu'une forme modulaire de poids 2 est nulle.

7. Montrer que G_4 a un unique zéro (simple) dans $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ en $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

8. Montrer que G_6 a un unique zéro (simple) dans $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ en i.

9. En déduire que G_4^3 et G_6^2 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$.

10. Montrer que j définit une bijection $\mathbb{H}/\Gamma \cong \mathbb{C}$.

11. Montrer que le corps des fonctions modulaires est $\mathbb{C}(j)$.

Exercice 7. L'algèbre de formes modulaires

Rappelons qu'une forme modulaire qui s'annule en $i\infty$ est appelée *parabolique*. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k et $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires paraboliques de poids k.

1. Montrer que $\mathcal{S}_k(\Gamma) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma)$ est une sous-espace de co-dimension 1.

2. Montrer que la multiplication par Δ induit un isomorphisme $\mathcal{M}_{k-12}(\Gamma) \cong \mathcal{S}_k(\Gamma)$.

3. Montrer que les monômes $\{G_4^\alpha G_6^\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{N},\ 4\alpha + 6\beta = k\}$ forment une base de $\mathcal{M}_k(\Gamma)$.

4. Montrer que lorsque k est paire, on a la formule des dimensions
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_k(\Gamma) = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] & \text{si } k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \mod 12. \end{cases}$$

5. En déduire que *l'algèbre des formes modulaires* $\mathcal{A}(\Gamma) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathcal{M}_k(\Gamma)$ est isomorphe à l'algèbre polynomiale $\mathbb{C}[X, Y]$.