# Analyse complexe, Exercices n$^o$ 1 :

## Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke [0]

*Dernière mise à jour* : 13 février 2023

---

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

## Suites et séries

**Exercice 1.**

Soit $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, alors on a $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z-\zeta^k)$. On divise par $z-1$ et on fait tendre $z$ vers 1 pour obtenir la formule

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\zeta^k) = n.$$

Or on sait que $\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\zeta^{k/2}-\zeta^{-k/2}}{2i}$. Ainsi

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^{k/2}-\zeta^{-k/2}) = \frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\zeta^{-k/2}(\zeta^k-1) = \frac{1}{2^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}(1-\zeta^k) = \frac{n}{2^{n-1}},$$

où on a utilisé que $\prod_{k=1}^{n-1}\zeta^{-k/2} = \zeta^{-\frac{n(n-1)}{4}} = (-i)^{n-1}$.

**Exercice 2.**

1. C'est vrai. En effet, remarquons que pour $a\in\mathbb{C}$, on a

$$a^2 = \Re(a)^2 - \Im(a)^2 + 2i\Re(a)\Im(a).$$

   Ainsi sous les hypothèses, la série $\sum_n \Re(a_n)^2 - \Im(a_n)^2$ converge. On veut montrer que $\sum_n \Re(a_n)^2 + \Im(a_n)^2$ converge, il suffit donc de montrer que $\sum_n \Im(a_n)^2$ converge, ou bien, de manière équivalente, que $\sum_n \Re(a_n)^2$ converge. Mais on sait que $\Re(a_n) > 0$ et comme $\sum_n a_n$ converge, en particulier, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on a $\Re(a_n)\in[0,1]$ et donc $\Re(a_n)^2 \leqslant \Re(a_n)$ ce qui implique que la série $\sum_n \Re(a_n)^2$ converge car $\sum_n \Re(a_n)$ converge. Ceci conclue la preuve.

2. C'est faux, il suffit de prendre $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n\geqslant 1$, alors $\sum_n |a_n|^2 = \sum_n \frac{1}{n^2}$ (qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$) converge mais $\sum_n a_n = \sum_n \frac{1}{n}$, la série harmonique, diverge.

3. C'est vrai mais la réciproque est fausse. Rappelons les définitions, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie $\Omega\subset\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$. On dit que $f_n$ converge simplement vers $f$ si pour tout $z\in\Omega$, $f_n(z)$ converge vers $f(z)$. On dit que $f_n$ converge uniformément sur $\Omega$ vers $f$ si

$$\lim_n \sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)| = 0.$$

   Ainsi, si $f_n$ converge uniformément vers $f$, pour $z_0\in\Omega$ on a $|f_n(z_0)-f(z_0)| \leqslant \sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|$ donc en passant à la limite on a montré que $f_n(z_0)$ converge vers $f(z_0)$ donc $f_n$ converge simplement vers $f$.

   Pour un contre exemple à la réciproque il suffit de prendre la suite de fonctions $(f_n\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n\in\mathbb{N}$ par

$$f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z|\leqslant n \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

   Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 mais $\sup_{z\in\mathbb{C}}|f_n| = 1$ donc la limite des suprema est 1, ce qui signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

4. C'est vrai mais la réciproque est fausse. Rappelons les définitions, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors on dit que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (vers une fonction $\Omega \to \mathbb{C}$). On dit que la série $\sum_n f_n$ converge normalement si
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z)| \leqslant \infty,$$
c'est-à-dire que la série des normes sup des fonctions converge.

   Premièrement si la série des $f_n$ converge normalement, elle converge simplement puisque pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0} |f_n(z_0)|$ converge. On va montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément en utilisant le critère de Cauchy uniforme, que l'on peut appliquer parce que $\mathbb{C}$ est complet. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers tels que $m \geqslant n$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$
$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(z_0)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |f_k(z_0)| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \sup_{z\in\Omega} |f_k(z)|$$
   Or d'après la convergence normale, pour tout $\epsilon \geqslant 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geqslant N$, $\sum_{k=n}^{m} \sup_{z\in\Omega} |f_k(z)| \leqslant \epsilon$. Donc la suite des sommes partiels $(\sum_{k=0}^n f_k)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme et donc converge uniformément. Notez qu'on a même montré que $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ converge uniformément.

   Pour un contre exemple à la réciproque il suffit de prendre la suite de fonctions $(f_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } z = n \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Alors $\sum_n f_n$ converge vers la fonction $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ et cette convergence est uniforme puisque pour $z_0 \in \Omega$ et $n \geqslant 1$ un entier $|\sum_{k=0}^n f_k(z_0) - f(z_0)| \leqslant \frac{1}{n}$. Mais la série des normes sup diverge parce que c'est la série harmonique :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$
   Donc la série converge uniformément mais pas normalement.

On retiendra les implications suivantes, dont les réciproques sont fausses :

**Convergence :** normale $\Longrightarrow$ uniforme $\Longrightarrow$ simple

**Exercice 3.**

1. Supposons que $\sum_n |a_n|$ converge et soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_n |a_n| \leqslant M$. Alors, comme la suite des sommes partielles est croissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leqslant M.$$
   Mais alors $\left(\sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et bornée donc convergente. Ainsi $\sum_n a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et donc converge. Pour montrer que les limites sont les mêmes, soit $\epsilon \geqslant 0$ et $N$ un entier tel que $\sum_{k\geqslant N} |a_k| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Soit $N_\sigma$ un entier tel que $\{0, 1, \ldots, N\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(N_\sigma)\}$. Alors $N_\sigma \geqslant N$ et
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{N_\sigma} a_{\sigma(n)}\right| \leqslant 2 \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leqslant \epsilon.$$
   Ainsi les deux séries ont même limite, i.e. pour toute bijection $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

2. On va commencer par montrer que la série a une sous-série divergente. On peut écrire $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ où $r_n \in \mathbb{R}_+^\times$, $\theta_n \in [0, 2\pi]$. On partitionne le plan complexe en un nombre fini de secteurs angulaires : On choisit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 5$ et on pose pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$
$$\Omega_k := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in \left[\frac{2k\pi}{N}, \frac{2(k+1)\pi}{N}\right[ \right\},$$

et $S_k := \{n \in \mathbb{N} \mid a_k \in \Omega_k\}$. Alors il existe un entier $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $\sum_{n \in S_k} r_n$ diverge et on montre que $\sum_{n \in S_k} a_n$ diverge. En effet

$$\left| \sum_{n \in S_k} a_n \right| \geqslant \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \sum_{n \in S_k} r_n = \infty.$$

On construit maintenant une permutation qui fait diverger la série, l'idée étant de concentrer les termes dans $S_k$. Posons deux fonctions $s, t \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui dénombrent $S_k$ et son complémentaire, toutes deux étant infinies puisque la série converge, i.e. $S_k = \{s(n); n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{N} \setminus S_k = \{t(n); n \in \mathbb{N}\}$. On construit la permutation : pour tout $j \in \mathbb{N}$ soit $n_j$ un entier tel que $|a_{t(j)}| + j \leqslant \left| \sum_{i=0}^{n_j - 1} a_{s(i)} + \sum_{i=1}^{j} a_{t(i)} \right|$, qui existe puisque la série diverge, et tel que $n_j < n_{j+1}$ . Alors on pose $\sigma(n_j) = t(j)$ et pour $i \in [\![n_j + 1, n_{j+1}]\!]$, $\sigma(i) = s(i - j)$. Alors, par construction la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$$

diverge.

3. C'est évident par le point précédent : si pour toute permutation de $\mathbb{N}$ la série converge, alors elle ne peut pas diverger absolument, sinon il y aurait une permutation pour laquelle la série permuté divergerait.

**Exercice 4.**

Le rayon de convergence de cette série est 1. En effet, le rayon de convergence est au plus 1 puisque $\lim_n H_n = \infty$ et de plus $H_n \leqslant n$ donc le rayon de convergence est au moins 1, puisque le rayon de convergence de $\sum_n nz^n$ est 1.

Pour expliciter la série entière il faut reconnaitre un produit de Cauchy. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n}^{\infty} z^n,$$
$$\log(1-z) = -\sum_{n}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

le second développement s'obtenant à partir du premier en intégrant. Le produit des deux fonctions donne le produit de Cauchy sur les coefficients, en effet :

$$\frac{\log(1-z)}{z-1} = \sum a_n z^n, \text{ où } \forall n \geqslant 1,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \frac{1}{k} = H_n.$$

**Exercice 5.**

1. On fixe $Q(x) = 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_d x^d$. Soit $V_1$, $V_2$, $V_3$ les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels des suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs complexes tels que respectivement $(i)$, $(ii)$ et $(iii)$ sont vérifiées. On veut montrer $V_1 = V_2 = V_3$, on a facilement que $V_1 = V_2$, mais pour $V_3$ on va utiliser un espace intermédiaire, correspondant à la décomposition en éléments simples de la fraction dans $V_1$. Soit donc $V_4$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \beta_{ij} (1 - \gamma_i z)^{-j},$$

où $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_i$, $d_i$ sont comme dans le point $(iii)$. Pour commencer, on montrer que $\dim_{\mathbb{C}} V_4 = d$. Comme les $R_{ij}(z) = (1 - \gamma_i z)^{-j}$, où $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant d_i$ sont des entiers, engendrent $V_4$, on a $\dim_{\mathbb{C}} V_4 \leqslant d$ puisque $\sum_{i=1}^{k} d_i = d$. Il suffit donc de montrer que les $R_{ij}$ sont linéairement indépendants. Par l'absurde, supposons qu'il existe $c_{ij} \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que

$$\sum c_{ij} R_{ij}(z) = 0.$$

Soit $i$ tel que $c_{ij} \neq 0$ et choisissons $j$ le plus grand entier tel que $c_{ij} \neq 0$. On multiplie la relation linéaire ci dessus par $(1 - \gamma_i z)^j$ et on évalue en $z = \gamma_i^{-1}$ : on obtient $c_{ij} = 0$, une contradiction, ce qui conclut que $\dim_{\mathbb{C}} V_4 = d$.

On obtient facilement que $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = d$ et $\dim_{\mathbb{C}} V_2 = d$, mais aussi que $\dim_{\mathbb{C}} V_3 \leqslant d$. Mais remarquons que

$$\frac{1}{(1-\gamma z)^j} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{-j}{n} (-\gamma z)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \gamma^n \binom{j+n-1}{j-1}.$$

Puisque $\binom{j+n-1}{j-1}$ est un polynôme de degré $j$ en $n$, on obtient que $V_4 \subset V_3$ et on conclut que $V_3 = V_4$.

De plus, pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_1$, il suffit de regarder le coefficient de $z^n$ dans la relation $Q(z)\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = P(z)$ pour obtenir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_2$ et les dimensions assurent que $V_1 = V_2$. Finalement, en ramenant la somme $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \beta_{ij}(1-\gamma_i z)^{-j}$ au même dénominateur on voit que $V_4 \subset V_1$ et donc $V_4 = V_1$, ce qui finit la démonstration.

2. Dans cet exemple on voit que $Q(z) = 1 - z - z^2$ et on commence par calculer $P(z) = az + b$ : les conditions initiales impliquent que $P(z) = z$ ce qui démontre l'égalité. Or comme $1 - z - z^2 = (1-\varphi z)(1-\bar{\varphi}z)$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on en déduit que $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\bar{\varphi}^n$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Les conditions initiales donnent alors
$$F_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

3. Commençons par déterminer la relation de récurrence. On pose $E = (1,0)$, $W = (-1,0)$ et $N = (0,1)$. On est alors entrain de compter le nombre de mots $A_1 \cdots A_n$ avec $A_i = E, W, N$ et tel que $EW$ et $WE$ n'apparaissent jamais. Soit $n \geqslant 2$, alors on a $a_{n-1}$ mots qui finissent par $N$. On a aussi $a_{n-1}$ mots qui finissent par $EE$, $WW$, ou $NE$ et finalement $a_{n-2}$ mots qui se terminent par $NW$. On a alors compté tous les chemins de longueur au moins 2 puisqu'ils se finissent tous par $N$, $EE$, $WW$, $NE$ ou bien $NW$. Ainsi la relation de récurrence s'écrit
$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ a_0 = 1,\ a_1 = 3.$$
Ainsi $Q(z) = 1 - 2z - z^2$ et il suffit de déterminer $P(z) = az + b$ : les conditions initiales donnent alors $P(z) = 1 + z$ ce qui démontre l'égalité. Comme $1 - 2z - z^2 = (1-(1+\sqrt{2})z)(1-(1-\sqrt{2})z)$ on en déduit que $a_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$ pour $a, b \in \mathbb{C}$. Finalement les conditions initiales donnent
$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

**Exercice 6.**

1. On a en effet la somme téléscopique
$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k b_k - a_{k+1}b_{k+1}) = a_0 b_0 - a_n b_n,$$
que l'on peut écrire comme
$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k b_k - a_{k+1}b_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k)$$

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$. On va montrer que sous les hypothèses, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Posons $A \geqslant 0$ tel que $|A_n| \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $N, M \in \mathbb{N}$ tels que $N > M$, on a par la sommation d'Abel
$$|S_N - S_M| = \left|A_N b_N - A_M b_M + \sum_{k=N}^{M-1} A_k(b_{k+1} - b_k)\right| \leqslant Ab_N + Ab_M + \sum_{k=N}^{M-1} A|b_{k+1} - b_k| \leqslant 2Ab_N.$$
Ceci conclut que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et donc convergente.

3. Il est clair que le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ est $\leqslant 1$ puisque la série entière diverge pour $z = 1$. De plus pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, comme la suite des $|a_n|$ est bornée disons par $A$ on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leqslant A \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{A}{1-|z|},$$
donc la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument et donc le rayon de convergence est 1. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$. Pour la convergence au bord on applique le critère d'Abel. Pour tout $N \in \mathbb{N}$
$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|},$$
donc les sommes partiels des $z^n$ sont bornées. Ainsi on est bien sous les hypothèses du critère d'Abel et $\sum_n a_n z^n$ converge.

**Exercice 7.**

**Exercice 8.**

1. On commence par observer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a de plus $\Re(f(re^{it})) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n e^{int} + \bar{a}_n e^{-int})r^n$. Comme cette série converge normalement on peut échanger l'intégrale et la somme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it}))e^{-int} dt = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} [a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt}]e^{-int} dt.$$

Or dans cette somme, tous les termes pour $k \neq n$ s'annulent par la formule ci-dessus, et on obtient

$$\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it}))e^{-int} dt = r^n \pi a_n.$$

2. La première inégalité est relativement directe, d'après la formule précédente on a

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} |\Re(f(re^{i\theta}))| d\theta \leqslant \frac{2A(r)}{r^n}.$$

On majore maintenant la série, alors sous l'hypothèse que $f(0) = 0$, en utilisant l'inégalité précédente en $R \geqslant r$

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} r^n |a_n| \leqslant 2A(R)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n = 2A(R)\left(\frac{R}{R-r} - 1\right) = \frac{2rA(R)}{R-r}.$$

Ainsi on conclut que $M(r) = \sup_{|z|=r}|f(z)| \leqslant \frac{2rA(R)}{R-r}$

3. On applique ce qui précède à $g(z) = f(z) - f(0)$ et on obtient

$$M(r) - |f(0)| \leqslant \frac{2r(A(r) + |f(0)|)}{R-r},$$

ce qui donne bien $M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}|f(0)| + \frac{2r}{R-r}A(R)$.