Analyse complexe, Exercices n^{o} 2 :

Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 20 février 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou totale des exercices du TD.`

Fonctions analytiques

Exercice 1. L'anneau des fonctions analytiques

1. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence R. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$ et montrons que f est analytique au voisinage de z_0. Plus précisément, soit $z \in D(z_0, r)$ avec $r = R - |z_0|$. Alors z est dans le rayon de convergence de $f(z)$ donc $\sum_n a_n z^n$ converge absolument. De plus $z^n = (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(z-z_0)^k z_0^{n-k}$ et donc
$$f(z) = \sum_n a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k}(z-z_0)^k z_0^{n-k},$$
mais comme la série converge absolument on peut réarranger les termes et on obtient $f(z) = \sum_n^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ avec $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \binom{k}{n} z_0^{k-n}$, ce qui conclut. Pour une autre preuve voir la proposition 1.1.12 du cours.

2. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ et $g(z) = \sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence non nul et supposons, sans perte de généralité, que $g(0) = 0$. Alors pour $z \in \mathbb{C}$ au voisinage de 0 on a
$$(f \circ g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
où nous avons utilisé que la série converge absolument. Ceci conclut.

3. On utilise le théorème de multiplication de Cauchy : si $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont des séries de nombres complexes absolument convergentes alors $\sum_n c_n$ est absolument convergente, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, et
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$
Ainsi, avec les notations de l'exercice, si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ et $g(z) = \sum_n b_n z^n$ sont deux fonctions analytiques en 0 on a $(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et donc $f \cdot g$ est analytique en 0. On en déduit que $\mathcal{O}(U)$ est un sous-anneau commutatif de l'anneau des fonctions.

4. Soit $f = \sum_n a_n z^n$ une série entière telle que $f(0) = a_0 \neq 0$. Il suffit de montrer que $\frac{1}{f}$ est une série entière. Or, on sait que $\frac{1}{z}$ est analytique en dehors de 0 et donc par le point 2 de l'exercice, on en déduit que la composé $\frac{1}{f}$ est analytique en 0.

5. On définit
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$
Ceci nous donne les développements
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

6. Calculons, soit $z \in \mathbb{C}$, alors
$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \frac{1}{4}\left((e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2\right) = \frac{1}{4}(2e^{iz} \cdot 2e^{-iz}) = 1.$$

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 2. Zéros d'une fonction analytique

D'après la proposition 1.1.7 du cours, on peut recouvrir K par des disques ouverts centrés en les zéros de f. Mais comme K est compact, on peut extraite une sous-famille fini de ces disques : ainsi f a un nombre fini de zéros dans K.

Exercice 3. Théorème de Gauss-Lucas

Soit $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme que l'on suppose unitaire (sans perte de généralité) et que l'on factorise $P(z) = \prod_{k=0}^{n}(z - a_k)$. On calcul la dérivée logarithmique de P :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - a_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z - a_k}}{|z - a_k|^2}.$$

Soit ζ une racine de P', on peut supposer que ce n'est pas une racine de P, sinon le résultat est clair. Posons

$$m_k = \frac{1}{|\zeta - a_k|^2},\ m = \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Alors en évaluant la dérivé logarithmique en ζ on obtient

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k,\ \lambda_k = \frac{m_k}{m}.$$

Lacets et homotopies

Exercice 4. Réunion et simple connexité

1. En général, la réunion de deux ouverts simplement connexes ne l'est pas. Par exemple, si $U_1 = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+^\times$ et $U_2 = \mathbb{C}\backslash-\mathbb{R}_+^\times$ alors $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^\times$ qui n'est pas simplement connexe, alors que U_1 et U_2 le sont.
2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts de $\mathbb{C}$ et posons $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\gamma\colon [0,1] \to U$ un lacet. Alors $\operatorname{im}\gamma \subset U$, mais $\operatorname{im}\gamma$ est compact, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{im}\gamma \subset U_N$. Or U_N est simplement connexe donc γ est homotope à un lacet constant. On a montré que U était simplement connexe.

Exercice 5.

Théorie de Cauchy

Exercice 6. Calcul d'intégrales

Commençons par montrer que γ est homotope au cercle de rayon a. Pour $t \in [0, 2\pi]$ et $u \in [0,1]$, posons

$$\Gamma(t) = ae^{it},\ \delta(t,u) = u\Gamma(t) + (1-u)\gamma(t).$$

On a $|\delta(u,t)|^2 = a^2\cos^2 t + [au + b(1-u)]^2 \sin^2 t > 0$ et on en déduit que δ réalise une homotopie dans $\mathbb{C}^\times$ de γ sur Γ. On en déduit

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

On obtient alors :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t} dt = iabJ - (a^2+b^2)\int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt.$$

Or, la dernière intégrale est nulle puisque $\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$. Pour justifier que l'intégrale est nulle, on peut aussi remarquer que dans l'égalité ci-dessus I est imaginaire alors que le dernier terme est réel, donc nécessairement nul. Ainsi $J = \frac{2\pi}{ab}$.

Exercice 7. Extension de la formule de Cauchy

D'après la formule de Cauchy, pour $|z| < r \leqslant R$, on a $I_r = f(z)$. On doit donc prouver que $I_r \to I_R$ quand $r \to R$. Pour $|u| > |z|$:

$$g(u) = \frac{uf(u)}{u-z}.$$

Fixons $\rho \in]|z|, R[$. Pour $\rho \leqslant r < R$, on obtient

$$2\pi|I_r - I_R| \leqslant \int_0^{2\pi} |g(re^{it}) - g(Re^{it})|dt.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme g est uniformément continue sur $\{u \in \mathbb{C}; \rho \leqslant |u| \leqslant R\}$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|g(re^{it}) - g(Re^{it})| \leqslant \epsilon$ dès que $R - r \leqslant \eta$. Alors, pour $R - r \leqslant \eta$, il vient $|I_r - I_R| \leqslant \epsilon$. Ceci conclut.

Exercice 8. Une inégalité

1. On sait que $g = f^4$ est analytique sur U et $g(0) = 0$. En appliquant la formule de Cauchy pour g on obtient

$$0 = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(e^{it})]^4 dt.$$

2. Posons $p(t) = \Re(f(e^{it}))$ et $q(t) = \Im(f(e^{it}))$. En prenant la partie réelle de l'égalité précédente on obtient

$$\int_0^{2\pi} [p^4(t) + q^4(t)]dt - 6 \int_0^{2\pi} p^2(t)q^2(t)dt = 0.$$

On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^{2\pi} q^4(t)dt = -\int_0^{2\pi} p^4(t)dt + 6\int_0^{2\pi} p^2(t)q^2(t)dt \leqslant 6\int_0^{2\pi} p^2(t)q^2(t)dt \leqslant 6\sqrt{\int_0^{2\pi} p^4(t)dt}\sqrt{\int_0^{2\pi} q^4(t)dt}.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} q^4(t)dt \leqslant 36 \int_0^{2\pi} p^4(t)dt.$$

Exercice 9. Majoration des coefficients d'une fonction analytique

Soient $r \in]0, 1[$, $n \geqslant 1$ un entier. D'après la formule de Cauchy on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt.$$

L'inégalité de l'énoncé implique alors que

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-r} = \frac{1}{r^n(1-r)}.$$

Pour $r = \frac{n}{n+1}$ on obtient :

$$|a_n| \leqslant (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Soit $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^\times$. On va montrer que $g(n) < e = \lim_{z\to+\infty} g(x)$, ce qui va conclure. On a $g'(x) = h(x)g(x)$ où $h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ et donc, g' est du signe de h. Mais

$$h'(x) = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right) < 0.$$

Ainsi, h est strictement décroissante. Comme $h(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, $h(x) > 0$ et donc g est strictement décroissante. On en déduit l'inégalité recherchée. Une autre façon de conclure est de remarquer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) < e$ puisque $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Exercice 10. Convexité du module

1. Commençons par justifier que la série converge. La série de terme général $|a_n|r^n$ converge donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ on a $|a_n|r^n \leqslant 1$. Ainsi pour $n \geqslant N$ on a $|a_n|^2 r^{2n} \leqslant |a_n|r^n$ donc $\sum_n |a_n|^2 r^{2n}$ converge.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < r < R$ et $t \in \mathbb{R}$ posons
$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}.$$
   On obtient alors
$$|S_n(t)|^2 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} + \sum_{0 \leqslant k \neq j \leqslant n} a_k \bar{a}_j e^{i(k-j)t}.$$
   On en déduit
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}.$$
   Soit $\epsilon > 0$, on sait que pour r fixé la série $S_n(t)$ converge normalement vers $f(re^{it})$ et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ on a $|S_n(t) - f(re^{it})| \leqslant \epsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient donc
$$||S_n(t)|^2 - |f(re^{it})|^2| \leqslant |S_n(t) - f(re^{it})||\overline{S_n(t)}| + |f(re^{it})||\overline{S_n(t) - f(re^{it})}| \leqslant 2\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k.$$
   Finalement, on peut conclure
$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \lim_n \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

2. Si f est non nul alors l'un au moins des coefficients a_n est non nul, donc par ce qui précède, $I(r) > 0$.

   Pour $0 < r < R$, posons $s = \ln r$ et $J(s) = I(r)$. Alors I et J sont des classes $\mathscr{C}^\infty$ et on va montrer que $(\ln J)''$ est positif. On a $I'(r) = J'(s)r^{-1}$ donc
$$J'(s) = rI'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n|a_n|^2 r^{2n}, \ \ J''(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)^2 |a_n|^2 r^{2n}.$$
   Or
$$(\ln J)'' = \frac{J(s)J''(s) - (J'(s))^2}{(J(s))^2},$$
   et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz le terme du numérateur est positif, i.e.
$$J(s)J''(s) - (J'(s))^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2n)^2 |a_n|^2 r^{2n}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2n|a_n|^2 r^{2n}\right)^2 > 0.$$
   Donc J est bien une fonction convexe.

3. La formule de Cauchy nous donne
$$2\pi f(0)^2 = \int_0^{2\pi} f(re^{it})^2 dt$$
   On obtient le résultat en prenant la partie réelle de la formule précédente :
$$2\pi \left(\Re(f(0))^2 - \Im(f(0))^2\right) = \int_0^{2\pi} [\Re(f(re^{it})]^2 dt - \int_0^{2\pi} [\Im(f(re^{it})]^2 dt.$$