Analyse complexe, Exercices n° 3 :

$\boxed{\text{Notes et corrections}}$

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 20 février 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

Équations de Cauchy-Riemann

Exercice 1. Propriétés des fonctions holomorphes

1. Remarquons que f est polynomiale en x et y et donc $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$, même de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour $z = x + iy$ et $h = h_0 + ih_1$ on a immédiatement que
$$df(z) \cdot h = h_0 + 2ih_1y.$$
Soit U un ouvert tel que la restriction de f à U est holomorphe. Alors f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann dont la première s'écrit $1 = 2y$. Or $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid 1 = 2y\}$ est d'intérieur vide. Ainsi, il n'existe aucun ouvert non vide $U \subset \mathbb{C}$ tel que f est holomorphe sur U.

2. Pour $z = x + iy \in U$, $x, y \in \mathbb{R}$ on a
$$a\partial_x\Re(f(z)) + b\partial_x\Im(f(z)) = a\partial_y\Re(f(z)) + b\partial_y\Im(f(z)) = 0.$$
Les relations de Cauchy-Riemann donnent alors le système suivant, pour tout $z \in U$.
$$\begin{cases} a\partial_x\Re(f(z)) - b\partial_y\Re(f(z)) = 0 \\ b\partial_x\Re(f(z)) + a\partial_y\Re(f(z)) = 0. \end{cases}$$
Or le déterminant de ce système est $a^2 + b^2 \neq 0$, car s'il était nul on aurait $a = b = c = 0$ ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $\partial_x\Re(f) = \partial_y\Re(f) = 0$ et de même on obtient $\partial_x\Im(f) = \partial_y\Im(f) = 0$. Comme U est connexe, on en déduit que f est constante. Géométriquement, la condition dit que l'image de f est contenu dans une droite dans $\mathbb{C}$, ce qui est donc impossible pour une fonction holomorphe qui n'est pas constante.

3. La première condition implique toutes les autres et on vient de montrer dans la question précédente que les trois premières sont équivalentes. Plus simplement, l'équivalence entre les trois premières conditions découle directement des équations de Cauchy-Riemann. De même, l'équivalence avec la dernière condition est directe par Cauchy-Riemann. Reste à montrer que si $|f|$ est constante alors f est constante.
On a $|f|^2 = \Re(f)^2 + \Im(f)^2$ et on suppose que $\Re(f)^2 + \Im(f)^2 = c \in \mathbb{R}_+^\times$. Si $c = 0$ on a fini donc on suppose que $c \neq 0$. En dérivant, on a
$$\Re(f(z))\partial_x\Re(f(z)) + \Im(f(z))\partial_x\Im(f(z)) = \Re(f(z))\partial_y\Re(f(z)) + \Im(f(z))\partial_y\Im(f(z)) = 0.$$
D'après Cauchy-Riemann, on a donc le système
$$\begin{cases} \Re(f(z))\partial_x\Re(f(z)) - \Im(f(z))\partial_y\Re(f(z)) = 0 \\ \Im(f(z))\partial_x\Re(f(z)) + \Re(f(z))\partial_y\Re(f(z)) = 0. \end{cases}$$
Le déterminant de ce système est $\Re(f(z))^2 + \Im(f(z))^2 = c \neq 0$ et donc on en déduit que $\partial_x\Re(f) = \partial_y\Re(f) = 0$. Comme U est connexe, $\Re(f)$ est constante et donc on conclut. On aurait aussi pu dire que si $|f|^2$ est une constante $\neq 0$, donc holomorphe, on en déduit que $\bar{f}$ est holomorphe et on conclut par la dernière condition. On a bien montré que les conditions étaient équivalentes.

4. Soit $h = f - g$, alors $h \in \mathcal{O}(U)$. De plus, comme $f + \bar{g}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a $f + \bar{g} = \bar{f} + g$. Donc
$$2i\Im(h) = h - \bar{h} = f - g - \bar{f} - \bar{g} = 0.$$
D'après la question précédente on en déduit que h est constante car U est connexe et que $f = h + g$ avec $h \in \mathbb{R}$.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

5. On pose $h = f/g$ qui est holomorphe sur U et donc

$$h(z) = \frac{f(z)\bar{g}(z)}{|g(z)|^2} \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que h est constante ce qui conclut.

6. Pour $z \in U$ on obtient en dérivant que

$$\begin{cases} \partial_x \Re(f(z)) = F'[\Im(f(z))]\partial_x \Im(f(z)) = -F'[\Im(f(z))]\partial_y \Re(f(z)) \\ \partial_y \Re(f(z)) = F'[\Im(f(z))]\partial_y \Im(f(z)) = F'[\Im(f(z))]\partial_x \Re(f(z)) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\partial_x \Re(f(z)) = -F'[\Im(f(z))]^2 \partial_x \Re(f(z)),$$

soit $\left(1 + F'[\Im(f(z))]^2\right) \partial_x \Re(f(z)) = 0$. On en déduit que $\partial_x \Re(f(z)) = 0$ puis de même que $\partial_y \Re(f(z)) = 0$. Ainsi $\Re(f)$ est constante et donc f est constante

Exercice 2. Branche du logarithme

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$ que l'on écrit comme $f = u + iv$ alors les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\partial_x u = \partial_y v, \ \partial_y u = -\partial_x v.$$

Comme $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ on a $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$. On applique maintenant la règle de la chaîne, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann :

$$\partial_r u = (\partial_x u)\cos\theta + (\partial_y u)\sin\theta = \frac{1}{r}\left((\partial_y v) r\cos\theta - (\partial_x v) r\sin\theta\right) = \frac{1}{r}\partial_\theta v$$
$$\partial_r v = (\partial_x) v\cos\theta + (\partial_y) v\sin\theta = \frac{-1}{r}\left((\partial_y u) r\cos\theta - (\partial_x u) r\sin\theta\right) = \frac{-1}{r}\partial_\theta u.$$

Finalement, les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires s'écrivent

$$\partial_r u = \frac{1}{r}\partial_\theta v, \ \partial_r v = \frac{-1}{r}\partial_\theta u.$$

2. Sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$ on peut définir $\ln(z)$. En coordonnées polaires $\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$. On a bien

$$\partial_r u = \partial_r \ln(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\partial_\theta v,$$
$$\partial_r v = \partial_r \theta = 0 = \frac{-1}{r}\partial_\theta u.$$

Exercice 3. Involutions sur les fonctions holomorphes

1. (a) Soit $z = x + iy \in U$ et $x, y \in \mathbb{R}$ et on obtient

$$g(z) = \Re(f)(x, -y) - i\Im(f)(x, -y).$$

Ainsi,

$$\partial_x \Re(g)(z) = \partial_x \Re(f)(\bar{z}), \ \partial_y \Re(g)(z) = -\partial_y \Re(f)(\bar{z}), \ \partial_x \Im(g)(z) = -\partial_x \Im(f)(\bar{z}), \ \partial_y \Im(g)(z) = -\partial_y \Im(f)(\bar{z}).$$

Comme f est holomorphe on a

$$\partial_x \Re(f(\bar{z})) = \partial_y \Im(f(\bar{z})), \ \partial_y \Re(f(\bar{z})) = -\partial_x \Im(f(\bar{z})).$$

On en déduit

$$\partial_x \Re(g(z)) = \partial_y \Im(g(z)), \ \partial_y \Re(g(z)) = -\partial_x \Im(g(z)).$$

On vient de montrer que g vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur U et donc elle est holomorphe dans U. Une autre façon de raisonner et de dire que f est analytique, soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ et d'en déduire que $g(z) = \sum_n \bar{a}_n z^n$ est aussi analytique donc holomorphe

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier. Posons $h_{2p+1} = \sigma \circ f_{2p+1} \circ \sigma$. D'après le premier point $g_1, h_{2p+1} \in \mathcal{O}(U)$. Par récurrence, supposons $g_{2p-1} \in \mathcal{O}(U)$, on a $g_{2p+1} = h_{2p+1} \circ f_{2p} \circ g_{2p-1}$. Donc $g_{2p+1} \in \mathcal{O}(U)$. Ceci conclut le cas impair. Si n est pair c'est faux, par exemple pour $f_1(z) = f_2(z) = z$ alors $g_2(z) = \bar{z}$. Donc $g_2 \notin \mathcal{O}(U)$.

2. Soit $z = x + iy \in U$ et $x, y \in \mathbb{R}$ et on obtient

$$g(z) = \Re(f)(y,x) - i\Im(f)(y,x).$$

ainsi,

$$\partial_x \Re(g(z)) = \partial_y \Re(f)(\theta(z)),\ \partial_y \Re(g(z)) = \partial_x \Re(f)(\theta(z)),\ \partial_x \Im(g)(z) = -\partial_y \Im(f)(\theta(z)),\ \partial_y \Im(g)(z) = -\partial_x \Im(f)(\theta(z)).$$

Comme f vérifie les relations de Cauchy-Riemann, on voit qu'il en est de même pour g, qui est donc holomorphe sur U. Comme précédemment, on peut aussi remarquer que $\overline{\theta(z)} = -iz$ donc si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ alors $g(z) = \sum_n \bar{a}_n (-iz)^n$ est analytique donc holomorphe.

Exercice 4. Théorème de Rolle

On considère la fonction dérivable

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{C},\ t \longmapsto \frac{1}{b-a} f[a + t(b-a)].$$

On a alors $F'(t) = \Re(F)'(t) + i\Im(F)'(t)$ et d'après le théorème de Rolle il existe $t_1, t_2 \in [0,1]$ tel que $\Re(F)(1) - \Re(F)(0) = \Re(F)'(t_1)$ et $\Im(F)(1) - \Im(F)(0) = \Im(F)'(t_2)$. Posons $c = a + t_1(b-a)$ et $d = a + t_2(b-a)$ on a bien $c, d \in [a,b]$ et

$$f(b) - f(a) = (b-a)[F(1) - F(0)] = (b-a)[\Re(f'(c)) + i\Im(f'(d))].$$

Exercice 5. Partie réelle d'une fonction holomorphe

Supposons qu'il existe une telle application f. On obtient

$$\begin{cases} \partial_y \Im(f)(z) = \partial_x \Re(f)(z) = \frac{1 + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\ \partial_x \Im(f)(z) = -\partial_y \Re(f)(z) = \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2}. \end{cases}$$

On en déduit qu'il existe $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\Im(f)(x,y) = \int \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} dx + h(y) = \frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} dx + h(y).$$

On a alors

$$\partial_y \Im(f)(z) = \frac{1 + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} + h'(y),$$

Mais comme $\mathbb{R}$ est connexe et $\Im(f)(0) = 0$ on obtient $h = 0$. Il vient

$$f(z) = \frac{\sin x + i \sinh y}{\cos x + \cosh y} = \frac{\sin x + i \sin iy}{\cos x + \cos(iy)} = \frac{2 \sin \cos}{2 \cos \cos} \tan \frac{x + iy}{2} = \tan \frac{z}{2}.$$

On en déduit que si f existe alors $f(z) = \tan \frac{z}{2}$ et un calcul facile montre que cette fonction est bien la solution du problème.

Applications de la formule de Cauchy

Exercice 6. Calcul d'intégrales

Pour la première intégrale, remarquons que le disque de centre 2 et de rayon 1 ne rencontre aucun des zéros de $z^2(z^4+1)$, donc

$$\int_{\gamma_{2,1}} \frac{z^7 + 1}{z^2(z^4+1)} dz = 0.$$

Soit $\zeta = e^{\frac{i\pi}{4}}$, alors $(z^4+1) = (z^2 - i)(z^2 + i) = (z - \zeta)(z + \zeta)(z - \bar{\zeta})(z + \bar{\zeta})$ et les seuls zéros de $z^2(z^4+1)$ dans le disque de centre 1 et de rayon 3/2 sont 0, ζ et $\bar{\zeta}$ et

$$\frac{1}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta})} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \right),\ \zeta - \bar{\zeta} = \sqrt{2} i,\ \zeta + \bar{\zeta} = \sqrt{2}.$$

Commençons par montrer que le pôle en 0 ne contribue pas. Pour ça, on commence par prendre un petit lacet $\alpha\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ autour de 0, soit $\alpha(t) = \epsilon e^{it}$. On calcul grâce à la formule de Cauchy

$$\int_\alpha \frac{z^7+1}{(z^4+1)}\frac{dz}{z^2} = 2i\pi \frac{7\cdot 0^6(0^4+1) - 3\cdot 0^3(0^7+1)}{1^2} = 0.$$

On décompose ensuite le lacet $\gamma_{1,3/2}$ en α et un lacet Γ qui entoure ζ, $\bar\zeta$ mais qui évite 0. Alors :

$$\int_{\gamma_{1,3/2}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}dz = \int_\Gamma \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}dz$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}dz = \int_\Gamma \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}dz &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\int_\Gamma \frac{z^7+1}{z^2(z+\zeta)(z+\bar\zeta)}\frac{dz}{z-\zeta} - \int_\Gamma \frac{z^7+1}{z^2(z+\zeta)(z+\bar\zeta)}\frac{dz}{z-\bar\zeta}\right)\\ &= \frac{2i\pi}{i\sqrt{2}}\left(\frac{\zeta^7+1}{\zeta^2(\zeta+\zeta)(\zeta+\bar\zeta)} - \frac{\bar\zeta^7+1}{\bar\zeta^2(\zeta+\bar\zeta)(\bar\zeta+\bar\zeta)}\right),\\ &= \frac{\pi}{2}(\bar\zeta^3 - \zeta^3) = \frac{\pi i}{\sqrt{2}},\ \text{car } \sin\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale :

$$\int_{\gamma_{0,3}} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}dz = \frac{2i\pi}{2}e^2 = i\pi e^2.$$

Pour la quatrième intégrale :

$$\int_{\gamma_{0,3}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_{0,3}} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}dz - \frac{1}{2}\int_{\gamma_{0,3}} \frac{\cos(\pi z)}{z+1}dz = i\pi(\cos\pi - \cos(-\pi)) = 0.$$

Pour la quatrième intégrale on a deux cas :

$$\int_{\gamma_{0,r}} \frac{\sin z}{z-b}dz = \begin{cases} 2i\pi\sin b & \text{si } |b| < r\\ 0 & \text{si } |b| > r\end{cases}$$

Ensuite :

$$\int_{\gamma_{1,1}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz = \frac{2i\pi n!}{(n-1)!} = 2i\pi n.$$

Le dernier de la ligne, on a $f(z) = \frac{1}{(z-b)^m}$ et $f^{(n-1)}(z) = \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{(z-b)^{m+n-1}}$:

$$\int_{\gamma_{0,r}} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m} = 2i\pi\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(a) = 2i\pi(-1)^m\binom{n+m-2}{n-1}\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}.$$

Vous l'avez compris, il suffit de regarder quels points le chemin entoure, d'appliquer la formule de Cauchy et parfois d'utiliser la décomposition en éléments simples. Les quatre dernières intégrales donnent

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{i,1}} \frac{e^z}{z^2+1}dz = \frac{-ie^i}{2},\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{-i,1}} \frac{e^z}{z^2+1}dz = \frac{ie^{-i}}{2},\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{0,3}} \frac{e^z}{z^2+1}dz = \frac{-ie^i}{2} + \frac{ie^{-i}}{2},\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1+2i,5}} \frac{4z}{z^2+9}dz = 2.$$

Exercice 7. Une transformée de Fourier

Soit $a \in \mathbb{C}$, posons

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2/2}dx.$$

On va commencer par montrer que I est indépendant de a. On considère le chemin α, constitué des 4 chemins $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ suivant :

Si on intègre $f(z) = e^{-z^2/2}$ sur ce lacet, comme f est holomorphe, on obtient 0. De plus, on montre que

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\alpha_4} f(z)dz\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\alpha_2} f(z)dz\right| = 0.$$

En effet,

$$\int_{\alpha_2} f(z)dz = a\int_0^1 \exp\left(\frac{-(R+ait)^2}{2}\right)dt = \left|ae^{(\frac{-R^2}{2})}\int_0^1 \exp\left(-aiRt - \frac{a^2t^2}{2}\right)\right| \leqslant A\left|ae^{(\frac{-R^2}{2})}\right|$$

avec $A \in \mathbb{R}$ qui majore l'intégrale indépendante de R. Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$, ce qui montre l'affirmation. Le calcul est le même pour α_4 et donc $I(a) = I(0) = \sqrt{2\pi}$. On en déduit facilement que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos(ax)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\cos(ax)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-((x+ia)^2+a^2)/2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-a^2/2}.$$

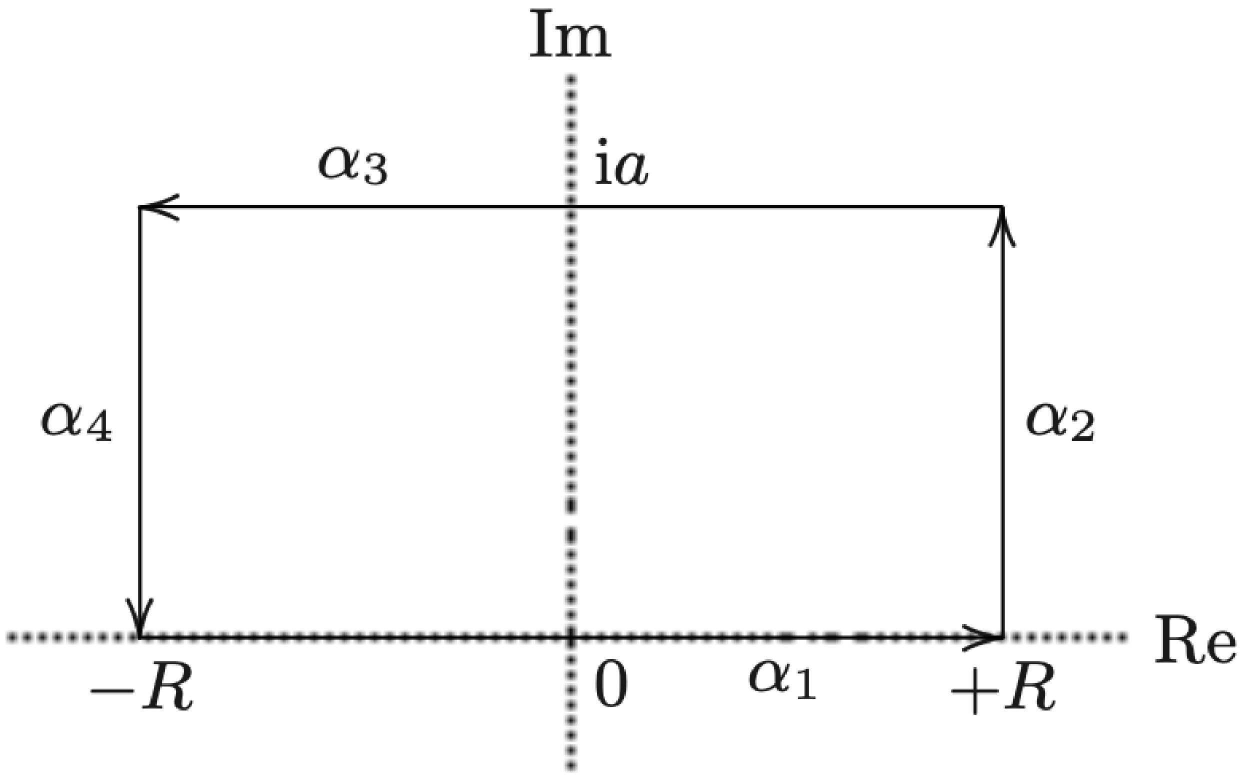

FIGURE 1 – Chemin α lorsque $a \in \mathbb{R}_+^\times$.

Exercice 8. Intégrales de Fresnel

On considère la fonctions $f(z) = e^{iz^2}$ sur $\mathbb{C}$ que l'on va intégrer sur un lacet bien choisi. On note $\zeta = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)$ et on choisit les chemins $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ définis par $\alpha_1(t) = Rt$, $\alpha_2(t) = Re^{\frac{4it}{\pi}}$, $\alpha_3(t) = (1-t)R\zeta$ et $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ est un lacet, comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ on a

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz + \int_{\alpha_3} f(z)dz = 0.$$

On a alors,

$$\int_{\alpha_1} f(z)dz = \int_0^R e^{it^2}dt = \int_0^R \cos(t^2)dt + i\int_0^R \sin(t^2)dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty \cos(t^2)dt + i\int_0^\infty \sin(t^2)dt$$
$$-\int_{\alpha_3} f(z)dz = \zeta\int_0^R e^{-t^2}dt \xrightarrow{R\to\infty}= \zeta\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}(1+i)}{4}.$$

Ainsi, il reste à montrer que $\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\alpha_2} f(z)dz\right| = 0$. Mais pour $z \in \operatorname{im}\alpha_2$ on a $|e^{iz^2}| \leqslant e^{-R^2\sin 2t} \leqslant e^{\frac{-4R^2}{\pi}t}$ en utilisant l'inégalité $\sin 2t \geqslant \frac{4}{\pi}t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$. On en déduit

$$\left|\int_{\alpha_2} f(z)dz\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-4R^2}{\pi}t}dt \leqslant \frac{\pi}{4R}(1-\exp(-R^2)) \leqslant \frac{\pi}{4R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

On conclut finalement que

$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \int_0^\infty \sin(t^2)dt = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

Exercice 9. Une commutativité

1. Soient $r \in]0,1[$ et $A = \sup_{|z|\leqslant r}|f(z)|$. La fonction $z \mapsto z^{-1}f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe g sur D et on a $|g(z)| \leqslant Ar^{-1}$. si $|z| = r$ et donc par le principe du maximum l'inégalité est encore vraie si $|z| \leqslant r$ Ainsi

$|f(z)| \leqslant A|z|r^{-1}$ si $|z| \leqslant r$. Or $|z|^n \leqslant |z| \leqslant r$ donc

$$|f(z^n)| \leqslant A|z|^n r^{-1} \leqslant A|z|^{n-1}.$$

Ainsi la série de terme général $f(z^n)$ converge normalement sur $\bar{D}(0,r)$ d'où le résultat. Le calcul est le même pour la convergence normale de F et G.

2. Soit $r \in]0,1[$, posons $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = re^{it}$. Comme f et g sont holomorphes sur D on a

$$2i\pi b_q = \int_\gamma g(z) z^{-q-1} dz.$$

Comme $g(z^n) = \sum_{q=1}^\infty b_q z^{qn}$ on déduit de la formule de Cauchy que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(z^n)}{z^{q+1}} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ ne divise pas } q \\ b_r & \text{si } q = nr. \end{cases}$$

Développons F en série entière $F(z) = \sum_{p=1}^\infty c_p z^p$; les coefficients sont alors donnés par

$$c_q = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F(z)}{z^{q+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=1}^\infty \int_\gamma \frac{g(z^p)}{z^{q+1}} dz = \sum_{\substack{n,m=1 \\ nm=q}}^\infty a_m b_n$$

où dans la deuxième égalité on a utilise la convergence normale fournie par la première question. Le développement de F est symétrique en les a_m et b_n donc F et G ont le même développement en l'origine. Ainsi, $F = G$.

3. On applique la question précédente à $f(z) = \ln(1+z)$ et $g(z) = \frac{z}{1-z}$ pour la première formule puis $f(z) = \frac{z}{1-z}$ et $g(z) = \frac{z}{1+z}$ pour la seconde. La dernière égalité est un petit calcul.