Analyse complexe, Exercices n$^{\mathrm{o}}$ 4 :

Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 13 mars 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

Principe du maximum

Exercice 1.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$ donc a fortiori pour tout $z \in \overline{D}$ d'après les hypothèses. Si $z \in \overline{D}$, posons $g(z) = [f(z)]^{-1}$, alors g est continue dans $\overline{D}$ et holomorphe dans D. Or, $g(0) = 1$ et $|g(z)| < 1$ pour $|z| = 1$. C'est en contradiction avec le principe du maximum donc f possède au moins un zéro dans D.

Exercice 2.

Soient ln la détermination principale du logarithme et $k = 1, \ldots, n$. Comme $f_k(U) \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ on peut définir $\ln f_k(z)$ pour tout $z \in U$ et, si l'on pose $h_k(z) = \exp[\alpha_k \ln f_k(z)]$ on obtient :

$$h_k \in \mathcal{O}(U),\ |h_k(z)| = |f_k(z)|^{\alpha_k}.$$

Soit h le produit des h_k, alors h est holomorphe sur U et $|h| = g$ a un maximum local en a. Comme U est connexe, le principe du maximum implique que h, donc g, sont constants sur U.

Exercice 3. Variations du lemme de Schwarz

1. Soient $z \in D$ et $r \in]0, 1 - |z|[$. On a $\overline{D}(z, r) \subset D$ donc d'après la formule de Cauchy on a

$$2\pi|f'(z)| = \left|\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})r^{-1}e^{-it}dt\right| \leqslant 2\pi M r^{-1}.$$

   On obtient le résultat en prenant la limite $r \to 1 - |z|$.

2. D'après l'hypothèse $z \mapsto z^{-k}f(z)$ s'étend en une fonction holomorphe sur D que l'on notera g. Si $|z| = r < 1$ on a $|g(z)| \leqslant Mr^{-k}$. Par le principe du maximum ceci est encore vrai pour $|z| \leqslant 1$. En prenant la limite $r \to 1$ on obtient $|g(z)| \leqslant M$ pour $z \in D$. On en déduit que $|f(z)| \leqslant M|z|^k$ si $z \in D$.

   Supposons qu'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que $f(a) = M|a|^k$. Alors $|g|$ atteint son maximum en a donc g est constante sur D par le principe du maximum. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = M$ et $f(z) = \lambda z^k$ pour tout $z \in D$.

3. D'après la question précédente on sait que $|f(z)| \leqslant M|z|$ si $z \in D$, donc :

$$|f(z) - z| \leqslant M|z| + |z| = (M + 1)|z|.$$

   Posons $g(z) = f(z) - z$. Alors $g(0) = g'(0) = 0$. D'après ce qui précède et la question précédente, on obtient $|f(z) - z| \leqslant (M + 1)|z|^2$.

4. Posons $h(z) = f'(z) - 1$. Alors $h(0) = 0$, $|h(z)| \leqslant M + 1$ donc compte tenu de la question 2 : $|h(z)| \leqslant (M + 1)|z|$.

   Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $g(t) = f(tz)$. On a $g'(t) = zf'(tz)$. Par suite, $g'(t) \leqslant M|z|$. L'inégalité des accroissements finis fournit alors

$$|f(z)| = |g(1) - g(0)| \leqslant M|z|.$$

   De même, soit $p(t) = f(tz) - tz, t \in [0, 1]$. Alors :

$$|p'(t)|= |z||f'(tz) - 1| \leqslant (M + 1)t|z|^2.$$

   On utilise une dernière fois l'inégalité des accroissements finis pour obtenir

$$|f(z) - z| = |p(1) - p(0)| \leqslant (M + 1)|z|^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{M + 1}{2}|z|^2.$$

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 4. Théorème de Paley-Wiener

1. Pour $\overline{D}(a,r) \subset U$, $1 \leqslant k \leqslant n$ on a d'après la formule de Cauchy
$$2\pi f_k(a) = \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt, \text{ donc } 2\pi|f_k(a)| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt.$$
On en déduit que
$$2\pi g(a) \leqslant \int_0^{2\pi} g(a+re^{it})dt.$$
Supposons que g ait un maximum local en a. Alors il existe $\eta > 0$ tel que, pour $r \leqslant \eta$ on ait $g(a) \geqslant g(a+re^{it})$. On a donc, si $r \leqslant \eta$:
$$2\pi g(a) = \int_0^{2\pi} g(a+re^{it})dt.$$
On en déduit que pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $r \leqslant \eta$:
$$2\pi|f_k(a)| = \int_0^{2\pi} |f_k(a+re^{it})|dt.$$
On va montrer qu'une telle fonction est constante. Plus précisément, supposons que $f \in \mathcal{O}(U)$ tel que
$$2\pi|f(a)| = \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt$$
et montrons que f est constante. Soit $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $\alpha f(a) = |f(a)|$. Alors
$$\int_0^{2\pi} \left(|f(a+re^{it})| - \alpha f(a+re^{it})\right) dt = 0$$
Quitte à changer f en αf on peut donc supposer que
$$\int_0^{2\pi} \left(|f(a+re^{it})| - f(a+re^{it})\right) dt = 0,$$
donc
$$\int_0^{2\pi} \left(|f(a+re^{it})| - \Re f(a+re^{it})\right) dt = 0.$$
Comme $z \mapsto |f(z)| - \Re f(z)$ est continue à valeurs positives on a donc $|f(a+re^{it})| = \Re f(a+re^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que la partie imaginaire de $z \mapsto f(z)$ est nulle au voisinage de a, donc f est constante.

On peut aussi conclure en remarquant que $f(a+re^{it}) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puisque la partie imaginaire est nulle puis en utilisant que $r \mapsto A_f(r) := \sup_{|z|=r} |\Re f(z)|$ est strictement croissante (cf. exercice 8). Notons $g = if$, on a $\Re g(a+re^{it}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, or
$$2\pi g(a) = \int_0^{2\pi} g(a+re^{it})dt.$$
Ainsi $A_g(0) = A_g(r)$ et on en déduit que g, donc f, est constante. Ceci conclut.

2. D'après les hypothèses on a
$$|f_1(z)(h(z))^{-1}| + \cdots + |f_n(z)(h(z))^{-1}| = 1$$
et le résultat est immédiat d'après la question précédente.

Exercice 5. Théorème des trois cercles d'Hadamard

D'après le principe des zéros isolés $M(r)$ et $M(R)$ sont non nuls. Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ non nul, $\theta = p/q$. L'application $z \mapsto z^p f(z)^q$ est holomorphe dans un ouvert contenant C. D'après le principe du maximum, il vient alors pour $r \leqslant \rho \leqslant R$:
$$\rho^p M(\rho)^q \leqslant \max\{r^p M(r)^q, R^p M(R)^q\}, \ \rho^\theta M(\rho) \leqslant \max\{r^\theta M(r), R^\theta M(R)\}.$$
Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Comme β est la limite d'une suite de rationnels, on obtient
$$\rho^\beta M(\rho) \leqslant \max\{r^\beta M(r), R^\beta M(R)\}.$$

Comme $M(r)$ et $M(R)$ sont non nuls, il exsite $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$r^{\alpha} M(r) = R^{\alpha} M(R), \ \alpha = -\frac{\ln M(R) - \ln M(r)}{\ln R - \ln r}.$$

On a alors pour $r \leqslant \rho \leqslant R$, $M(\rho) \leqslant \rho^{-\alpha} r^{\alpha} M(r)$, soit :

$$M(\rho) \leqslant \exp\left(\ln M(r) - \frac{\ln r - \ln \rho}{\ln R - \ln r}(\ln M(R) - \ln M(r))\right),$$

Ce qui permet de conclure :

$$M(\rho) \leqslant \exp\left(\frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r} \ln M(R) + \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r} \ln M(r)\right).$$

Exercice 6.

1. Soit $h = e^{-f}$. On a $|h| = e^{-\Re f} \leqslant 1$ donc s'il existe $a \in D$ tel que $\Re f(a) = 0$ alors $|h(a)| = 1$. Donc d'après le principe du maximum h est constante dans D. C'est absurde car $h(0) = e^{-1}$ et $|h(a)| = 1$. Soient $z \in D$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = a + ib$. Alors
$$|g(z)|^2 = \frac{a^2 + b^2 + 1 - 2a}{a^2 + b^2 + 1 + 2a},$$
mais comme $a > 0$ d'après la première question, on a $|g(z)| < 1$. Puisque $g(0) = 0$ il resulte du lemme de Schwarz que $|g(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$.

2. Soit $z \in D$. D'après la question précédente on a
$$\frac{||f(z)| - 1|}{|f(z)| + 1} \leqslant \frac{|f(z) - 1|}{|f(z) + 1|} \leqslant |z|.$$
Les inégalités s'en déduisent.

3. S'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que
$$|f(a)| = \frac{1 - |a|}{1 + |a|},$$
on obtient
$$|g(a)| \geqslant \frac{1 - |f(a)|}{1 + |f(a)|} = |a|.$$
D'après la question 2, il vient $|g(a)| = |a|$ donc d'après le lemme de Schwarz, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| = 1$ et $g(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$. Par conséquent :
$$f(z) = \frac{1 + \lambda z}{1 - \lambda z}.$$
Inversement, si f est de cette forme, on trouve que $f(0) = 1$, $\Re f(z) > 0$ pour tout $z \in D$. L'égalité si dessus est vérifié pour $a = -\bar{\lambda}/2$. On obtient le même résultat pour l'autre inégalité.

Exercice 7. Automorphismes du demi-plan

1. Si $f = e^{i\theta} \mathrm{id}_D$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors $f(0) = 0$ et $f \in \mathrm{Aut}\, D$. Inversement, soit $f \in \mathrm{Aut}\, D$ vérifiant $f(0) = 0$. Si $z \in D$, il résulte du lemme de Schwarz que
$$|f(z)| \leqslant |z|, \ |f^{-1}(z)| \leqslant |z|.$$
Ainsi $|f(z)| = |z|$ et le lemme de Schwarz nous dit alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta} \mathrm{id}_D$.

2. Pour $a, z \in D$, posons :
$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z},$$
alors on sait que $\varphi_a \in \mathrm{Aut}\, D$ et que $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$.

   Soient $f \in \mathrm{Aut}\, D$, $a = f(0)$ et $g = \varphi_a \circ f$. On a $g \in \mathrm{Aut}\, D$ tel que $g(0) = 0$ donc d'après la première question il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g = e^{i\theta} \mathrm{id}_D$. On en déduit que $f = e^{-i\theta} \varphi_b$ avec $b = -ae^{-i\theta}$. Ainsi on a montré que
$$\mathrm{Aut}\, D = \{e^{i\theta} \varphi_a \ ; \ \theta \in \mathbb{R}, \ a \in D\}.$$

3. Il est clair que $h \in \mathcal{O}(D)$. Posons $l \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ défini par

$$l(w) = \frac{w-i}{w+i}.$$

Pour $z \in D$, $w = u + iv \in \mathbb{H}$, on a :

$$h(z) = \frac{-2\Im z + i(1-|z|^2)}{|1-z|^2}, \ |l(w)|^2 = \frac{u^2+v^2+1-2v}{u^2+v^2+2v}.$$

On en déduit que $h(D) \subset \mathbb{H}$ et $l(\mathbb{H}) \subset D$. Un calcul montre que $h \circ l = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ et $l \circ h = \mathrm{id}_D$. Ceci conclut.

4. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Déterminons les conditions tels que $\psi \in \operatorname{Aut} \mathbb{H}$ où

$$\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On obtient

$$|c| + |d| \neq 0, \ \Im\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \frac{ad-bc}{|ci+d|^2} > 0.$$

Inversement si $ad - bc > 0$ on obtient $\psi \in \operatorname{Aut} \mathbb{H}$. Soit $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{H}$, alors les questions précédentes assurent qu'il existe $a \in D$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(z) = h[e^{i\theta}\varphi_a(l(z))].$$

Finalement un petit calcul nous assure que

$$\operatorname{Aut} \mathbb{H} = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \ ; \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}.$$

5. Soit $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{H}$. Prouvons que f est produit de transformations du type indiqué. Si $c = 0$, on a $d \neq 0$, $ad^{-1} > 0$ et $f(z) = ad^{-1}z + bd^{-1}$. Si $d = 0$ il vient $c \neq 0$, $bc^{-1} < 0$, $f(z) = ac^{-1} + (-bc^{-1})(-z^{-1})$. Si $cd \neq 0$ on obtient :

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c^2}\left(-\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right).$$

Exercice 8.

1. Commençons par M. Elle est croissante par le principe du maximum. Supposons que $M(r') = M(r'')$ pour $r' < r''$. Soit $r \in]r', r''[$, alors $M(r) = M(r')$ et comme $|f|$ est continue, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = r$, $M(r) = |f(a)|$ et il resulte du principe du maximum que f est constante sur U. La continuité découle d'un petit calcul.

   Pour A, comme $|e^f| = e^{\Re f}$, on en déduit $r \mapsto \sup_{|z|=r} \Re f(z)$ est croissante et de même que $r \mapsto \inf_{|z|=r} - \Re f(z)$ est croissante donc que A est croissante et par le même calcul, qu'elle est continue. Pour montrer la croissance stricte, le même argument que précédemment nous donne que si A n'est pas strictement croissante, alors $\Re f$ admet un maximum local en un point $a \in \mathbb{C}$. Montrons qu'alors f est constante en utilisant $g = e^f$ qui vérifie $|g| = e^{\Re f}$: on en déduit que g, qui est holomorphe, admet un maximum local donc par le principe du maximum, g est constante donc $f'e^f = 0$ et enfin $f' = 0$. Comme on est sur un connexe, on en déduit que f est constante.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$g(z) = \frac{f(2rz)}{2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)},$$

qui est bien définie comme A est croissante et $A(0) = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$ et $f(2rz) = a + ib$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Il vient :

$$2A(2r) + \varepsilon - f(2rz) = \underbrace{A(2r)}_{\geqslant a} + \underbrace{\varepsilon + (A(2r) - a)}_{\geqslant 0} - ib$$

et on en déduit que $|g(z)| \leqslant 1$ donc le lemme de Schwarz assure que $|g(z)| \leqslant |z|$ pour $|z| < 1$, donc :

$$|f(2rz)| \leqslant |z|(2A(2r) + \varepsilon + f(2rz)).$$

On fait tendre $\varepsilon \to 0$ pour obtenir

$$|f(2rz)|(1 - |z|) \leqslant 2A(2r)|z|,$$

que l'on applique en $z = u/2$ avec $|u| = 1$, pour finalement conclure $M(r) \leqslant 2A(2r)$.

3. Comme
$$|f(z)| - |f(0)| \leqslant |f(z) - f(0)|,$$
on obtient que $M(r) \leqslant 2[A(2r) - \Re f(0)] + |f(0)|$. Compte tenu de l'hypothèse, on en déduit qu'il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que $M(r) \leqslant C + Dr^a$ pour r assez grand. Ceci conclut, par le théorème de Liouville, que f est un polynôme (de degré au plus a).

Fonctions lacunaires

Exercice 9. Un exemple

Notons déjà que cette série diverge en $z = 1$. Or on a $f(z^a) = f(z) - z$ et donc elle diverge en tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^a = 1$ i.e. elle diverge en toutes les racines a-ièmes de l'unité. Or on peut continuer, en écrivant $f(z^{a^n}) = f(z^{a^{n-1}}) - z^{a^{n-1}}$ et par une récurrence immédiate, que f diverge en toutes les racines de l'unité. Or les racines de l'unité sont denses dans le cercle unité, donc f diverge en tout point du cercle unité. On a montré que f était lacunaire.

Exercice 10. Théorème d'Ostrowski-Hadamard

Exercice 11. Théorème de Fabry et la méthode de Turán

1. Supposons que les z_n sont deux à deux distincts, sinon on pourrait les regrouper et remplacer N par un entier plus petit. Soit $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ que l'on fixera plus tard. Alors
$$\left|\sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu s_{M+1+\nu}\right| \leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu|\right) \max_{M+1 \leqslant \nu \leqslant M+N} |s_\nu|.$$
Or la somme à gauche s'identifie à
$$\sum_{n=1}^{N} b_n z_n^{M+1} \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu z_n^\nu = \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^{M+1} p(z_n),$$
où $p(z) = \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu z^\nu$. On choisit les a_ν de sorte que
$$p(z_n) = z_n^{-M-1},$$
pour $1 \leqslant n \leqslant N$. Or ceci détermine un système linéaire non dégénéré à N équations et N inconnues ce qui détermine les a_ν de manière unique. Pour conclure la preuve il suffit de montrer
$$\sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k.$$
Pour cela on commence par écrire $p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \prod_{n=1}^{k} (z - z_n)$ et la formule de Cauchy assure que
$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p(z)}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz,$$
où on choisit R tel que $R > |z_k|$ pour tout indice k. On observe que pour M un entier non nul on a
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz = 0,$$
puisque cette intégrale est indépendante de R et qu'elle se majore, en norme, par un petit o de R^{-1}. Ceci assure que
$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{p(z) - z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz.$$
Or, d'après le choix de p, la fonction sous l'intégrale est holomorphe en les z_n, donc la seule singularité est un pole d'ordre $M + 1$ en $z = 0$ donc par la formule de Cauchy on peut changer l'intégrale en une intégrale sur le cercle $|z| = r$ avec $r < 1$. Puisque $\frac{p(z)}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)}$ est holomorphe à l'intérieur de ce nouveau contour, on conclut que
$$c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz = \frac{(-1)^k}{z_1 \ldots z_{k+1} 2\pi i} \int_{|z|=r} \prod_{n=1}^{k+1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1} z^{-M-1} dz,$$

finalement ceci donne $c_k = \frac{(-1)^k}{z_1 \ldots z_{k+1}} C_{M,k}$ où pour $|z| < 1$.

$$\prod_{n=1}^{k+1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,k} z^m.$$

Puisque

$$\frac{1}{1 - z/z_n} = \sum_{m=0}^{\infty} z_n^{-m} z^m$$

a des coefficients de modules $\leqslant 1$ et puisque

$$\left(\sum_{m=0} z^m\right)^{k+1} = (1-z)^{-k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} z^m,$$

on en déduit que $|C_{M,k}| \leqslant \binom{M+k}{k}$, donc

$$|c_k| \leqslant \frac{\binom{M+k}{k}}{|z_1 \ldots z_{k+1}|}.$$

D'un coté, on a

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \prod_{n=1}^{k} (z - z_n) = \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu z^\nu$$

et de même on pose

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} (z+1)^k = \sum_{k=0}^{N-1} A_\nu z^\nu.$$

On compare les coefficients des deux polynômes, ce qui donne $|a_\nu| A_\nu$ donc

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} |a_\nu| \leqslant \sum_{\nu=0}^{N-1} A_\nu = P(1) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k.$$

Ceci conclut la preuve de la majoration. Pour justifier que la borne est la meilleure possible, on observe que si les z_n sont tous proches de -1, les $C_{m,k}$ sont proches de $(-1)^m \binom{k+m}{k}$ donc les c_k sont proches de $(-1)^{m+1} \binom{k+m}{k}$. Ainsi les coefficients de $(-1)^{M+1} p(z)$ et $P(z)$ sont proches et donc $\sum |a_\nu|$ est proche de $P(1)$. Finalement, si on choisit les b_n tel que $s_\nu = 1$ pour tout ν tel que $M+1 \leqslant \nu \leqslant M+N$. Ce système a une unique solution : avec les b_n choisis de la sorte, on voit qu'on a presque une égalité dans l'inégalité. Cette exemple marche aussi si on prend les z_n proches d'une même valeur, qui n'est pas forcément -1.

2. On calcule

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k \leqslant 2^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} = 2^{N-1} \binom{M+N}{N-1} \leqslant 2^{N-1} \frac{(M+N)^{N-1}}{(N-1)!}.$$

Mais d'après la formule de Stirling $(N-1)! \geqslant \left(\frac{N}{e}\right)^{N-1}$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k \leqslant \left(\frac{2e(M+N)}{N}\right)^{N-1}.$$

3. Quitte à translater on peut supposer que $T(x)$ prend son maximum en $x = 0$. Si $0 \in I$ le résultat est trivial, supposons que $I = [\alpha, \beta]$ avec $0 < \alpha < \beta < 1$. Posons $\delta = (\beta - \alpha)/N$, $M = \left[\frac{\alpha}{\delta}\right]$. Alors $\nu\delta \in I$ si $M+1 \leqslant \nu \leqslant M+N$. Prenons $z_n = \exp(2i\pi\lambda_n\delta)$. Donc par le théorème de Turán, en remplaçant le facteur par la constante de la question 2 :

$$\max_I |T(x)| \geqslant \max_{M+1 \leqslant \nu \leqslant M+N} |s_\nu| \geqslant \left(\frac{N}{2e(M+N)}\right)^{N-1} |T(0)|.$$

Mais

$$M \leqslant \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha N}{\beta - \alpha}$$

de sorte que

$$M + N \leqslant \frac{\beta N}{\beta - \alpha},$$

donc

$$\frac{N}{M+N} \geqslant \frac{\beta-\alpha}{\beta} \geqslant \beta-\alpha = L$$

ce qui permet de conclure.

4. D'après la formule de Stirling on a $\binom{n}{k} < n^k/k! < (en/k)^k$. D'après l'inégalité de Cauchy on a $|f^{(n)}(0)/n!| < r^{-n/2}$ pour tout $n > n_0(f,r)$. Donc la somme considérée est majoré par

$$\sum_{n>Ck} \left(\frac{en}{k}\right)^k r^{(n-2k)/2}.$$

Le quotient des termes successifs est $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k r^{1/2} < e^{k/n} r^{1/2}$ qui est a fortiori $< r^{-1/3}$ si $n > Ck$ et $C > 6/\log\frac{1}{r}$. Donc la somme est négligeable en r devant $(eCr^{(C-2)/2})^k$. On choisit C assez grand comme fonction de r on peut majorée ce terme par $1/2$ puis la somme original sera < 1 pour $k > k_0(f,r)$.

5. Supposons que f est régulière en un point z du cercle unité, sans perte de généralité, on peut supposer que $z=1$. Donc f est se prolonge analytiquement pour $|z-1| \leqslant 3\pi\delta$ si δ est assez petit. Soit r un réel fixé tel que $0<r<1$ et soit δ' déterminé par la relation

$$|r - \exp\left(2\pi i\frac{\delta}{2}\right)| = 1-r+\delta',$$

ce qui donne $\delta' > 0$. Posons $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|1 - \frac{\delta'}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 2\pi\delta\}$. Puisque S est compact, contenu dans le domaine d'holomorphie de f, on en déduit que $\mu = \max_{z\in S}|f(z)| < \infty$. Si δ est petit alors le disque $|z - r\exp(2\pi i\alpha)| \leqslant 1-r+\frac{\delta'}{3}$ est dans S dès que $|\alpha| \leqslant \delta/2$. D'après l'inégalité de Cauchy, dès que $|\alpha| \leqslant \delta/3$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(r\exp(2\pi i\alpha))}{k!}\right| \leqslant \frac{\mu}{(1-r+\delta'/3)^k}.$$

Or

$$\frac{f^{(k)}(r\exp(2\pi i\alpha))}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-k},$$

donc d'après la question précédente, pour k assez grand et uniformément en α on a :

$$\left|\frac{f^{(k)}(r\exp(2\pi i\alpha))}{k!} - \sum_{n=0}^{Ck} \binom{n}{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^{n-k}\exp(2\pi i(n-k)\alpha)\right| < 1.$$

Soit $N(X)$ le nombre de $p_n \leqslant X$. C'est à dire que $N(X)$ est le cardinal de l'ensemble de $n \leqslant X$ tel que $f^{(n)}(0) \neq 0$. Par la troisième question on obtient que

$$\max_\alpha \left|\sum_{n=0}^{Ck} \binom{n}{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^{n-k}\exp(2\pi i(n-k)\alpha)\right| \leqslant \left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)} \max_{|\alpha|\leqslant\delta/2} \left|\sum_{n=0}^{Ck} \binom{n}{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^{n-k}\exp(2\pi i(n-k)\alpha)\right|.$$

Ainsi, par ce qu'on a fait précédemment

$$\max_\alpha \left|\frac{f^{(k)}(r\exp(2\pi i\alpha))}{k!}\right| \leqslant 1 + \left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)} \left(1 + \frac{\mu}{(1-r+\delta'/3)^k}\right).$$

D'après l'hypothèse, $N(X) = o(X)$ quand $X \to \infty$, donc pour k assez grand et uniformément en α, on a :

$$\left|\frac{f^{(k)}(r\exp(2\pi i\alpha))}{k!}\right| \leqslant \frac{\mu}{(1-r+\delta'/4)^k}.$$

Ainsi, le développement en série entière de f au voisinage de $r\exp(2\pi i\alpha)$ a rayon de convergence $\geqslant 1-r+\delta'/4$, pour tout α. Donc f est holomorphe dans le disque $|z|1+\delta'/4$. Mais ceci contredit l'hypothèse que le rayon de convergence de f est 1 et donc on conclut.