Analyse complexe, Exercices n° 5 :

Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : 27 mars 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

Produits infinis

Exercice 1. Produits de Blaschke

1. Pour montrer que φ_{-a} est l'inverse de φ_a on résout l'équation $\varphi_a(z) = w$ d'inconnue $z \in D$ pour trouver $z(1+\bar{a}w) = w + a$ et donc $\varphi_{-a}(w) = z$. On remarque que l'homographie φ_a est même analytique dans le disque $D(0, \frac{1}{|a|})$ donc continue sur $\mathbb{U}$. De plus, on a
$$|z| = 1 \implies |1 - \bar{a}z| = |z(1 - \bar{z}a)| = |z - a| \implies |\varphi_a(z)| = 1.$$
Par le principe du maximum on en déduit que $|\varphi_a(z)| < 1$ dès que $z \in D$.

2. Soit $z_0, \dots z_n \in \mathbb{C}$ tels que $\{z_0, \dots, z_n\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) = w\}$. Soit $B = \prod_{i=0}^{n} \varphi_{z_i}$ le produit fini de Blaschke associé à $\{z_0, \dots, z_n\}$. La fonction $\psi = \varphi_w \circ \varphi$ est à valeurs dans D et s'annule précisément en les z_i. Donc $\psi = Bg$ avec $g \in \mathcal{O}(D)$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $r \in]0, 1[$ tel que
$$|z| = r \implies |B(z)| > 1 - \varepsilon \implies |g(z)| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$
Par le principe du maximum on en déduit que $|g(0)| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$ et donc $|g(0)| \leqslant 1$. On en déduit
$$|w| = |\psi(0)| = |B(0)g(0)| \leqslant |B(0)|.$$
Finalement, en prenant l'inverse et en appliquant log on obtient à la limite
$$\sum_{\varphi(z)=w} \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \leqslant \log(1/|w|).$$

3. Comme f est bornée, on peut supposer que $\forall z \in D,\ |f(z)| < 1$ et $w \coloneqq f(0) \neq 0$. Soit $\varphi = \varphi_w \circ f$ qui vérifie $\varphi \colon D \to D$ et $\varphi(0) = 0$. Il est clair que, avec multiplicités
$$f(z) = 0 \iff \varphi(z) = -w.$$
D'après la question précédente on a $\sum_{j=0}^{\infty} \log\left(\frac{1}{|z_j|}\right) \leqslant \log(1/|w|) < \infty$ et la série de terme général $\log\left(\frac{1}{|z_j|}\right)$ converge. Comme $|z_i| \xrightarrow{i\to\infty} 1$, par le principe des zéros isolés, on a $\log\left(\frac{1}{|z_i|}\right) \sim 1 - |z_i|$ et donc finalement la série de terme général $1 - |z_i|$ converge.

4. Posons
$$b_n(z) \coloneqq 1 + \varepsilon_n(z) \coloneqq \frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}.$$
Donc
$$\varepsilon_n(z) = \frac{(|z_n|^2 - |z_n|)z + z_n(|z_n| - 1)}{z_n(1 - \bar{z}_n z)} = (|z_n| - 1)\frac{|z_n|z + z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$
d'où
$$|\varepsilon_n(z)| \leqslant \frac{(1 + |z|)(1 - |z_n|)}{|1 - \bar{z}_n z|} \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}(1 - |z_n|).$$
Ceci montre que la série des $\varepsilon_n(z)$ est normalement convergente sur tout compact de D, ce qui assure la convergence uniforme du produit sur tout compact de D vers une fonction analytique. De plus, $|b_j(z)| \leqslant 1$ donc $\prod_{j=0}^{n} |b_j(z)| \leqslant 1$ et par passage à la limite $|B(z)| \leqslant 1$.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

5. Soit $B_n = \prod_{j=0}^n \varphi_{z_j}$. On donne deux preuves du résultat. Les calculs de la question précédente assurent que

$$|B_n(z)|^2 = \prod_{j=0}^{n}\left(1 - \frac{(1+|z|)(1-|z_n|)}{|1-\bar{z}_n z|}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+|z|)(1-|z_n|)}{|1-\bar{z}_n z|}\right).$$

Soit $K \subset D$ un compact et $r = \sup_{z\in K}|z| < 1$. Alors

$$z \in K \implies \sum_{j=0}^{n}\frac{(1+|z|)(1-|z_n|)}{|1-\bar{z}_n z|} \geqslant \frac{1-r^2}{4}\sum_{j=0}^{n}(1-|z_j|^2) =: M_n$$

avec $M_n \to \infty$ par hypothèse et donc $\sup_{z\in K}|B_n(z)| \leqslant e^{-M_n}$ ce qui prouve le résultat.

Une autre preuve utilise le théorème de Montel. Soit f une valeur d'adhérence de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette valeur d'adhérence vérifie $\forall z \in D,\ |f(z)| \leqslant 1$ et $f(z_n) = 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $f = 0$ donc l'unique valeur d'adhérence de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la topologie de Fréchet est la fonction nulle et le théorème de Montel montre que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers 0.

6. Commençons par montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D telle que $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty$ et dont l'ensemble des points d'accumulation est exactement F. Comme F est un espace métrique compact il est séparable et donc il existe une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de F dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est exactement F. Posons alors $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = (1-n^{-2})u_n$. La suite à bien les propriétés que l'on veut puisque $1-|z_n| = n^{-2}$ et $z_n - u_n \to 0$.

Soit $K \subset \mathbb{C}\setminus F$ un compact. Justifions qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|1-\bar{z}_n z| \geqslant \delta$ pour tout $z \in K$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons le contraire, alors il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K et une sous-suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $1-\bar{a}_n w_n \to 0$. Quitte à encore extraire une sous-suite convergente de ces suites on peut supposer que $a_n \to a \in F$ et $w_n \to w \in K$. On en déduit que $1-\bar{a}w = 0$ et donc $a = w$ puisque $a \in \mathbb{U}$. C'est une contradiction puisque alors $a \in K \cap F = \varnothing$.

Finalement on est en mesure de construire la fonction voulue, qui sera le produit de Blaschke B des z_n étudié à la question 4. Soit $K \subset \mathbb{C}\setminus F$ un compact. Posons $M = \sup_{z\in K}|z| < \infty$ et $\delta = \inf_{n\in\mathbb{N}}|1-\bar{z}_n z| > 0$. Rappelons qu'on a établi la majoration

$$|\varepsilon_n(z)| \leqslant \frac{(1+|z|)(1-|z_n|)}{|1-\bar{z}_n z|},\ \forall z \in \mathbb{C},$$

ce qui donne

$$\sup_{z\in K}|\varepsilon_n(z)| \leqslant \frac{(1+M)(1-|z_n|)}{\delta}.$$

Ainsi $\sum_n \varepsilon_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus F$ et donc le produit $\prod_{n=0}^{\infty}(1+\varepsilon_n(z))$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus F$ et y définit un prolongement holomorphe de B. Si B admet un prolongement analytique f au voisinage de $w \in F$, les zéros de f, qui contiennent les z_n, s'accumulent en w et par prolongement analytique, f est identiquement nul mais c'est absurde puisque le produit B converge absolument sur D et donc $B(z) \neq 0$ si $z \in D$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ z \neq z_n$. Ainsi, on a montré que les points de $\mathbb{U}$ au voisinage desquels B a un prolongement analytique sont exactement les points de $\mathbb{U}\setminus F$.

Exercice 2. Valeur interdite des produits d'Euler

1. On commence par montrer que $|f(n)| < 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Pour $p \in \mathcal{P}$ on a $|f(p)| < 1$ sinon la série géométrique de terme général $|f(p^k)| = |f(p)|^k$ diverge ce qui contredit l'hypothèse $\sum_n |f(n)| < \infty$. La décomposition en facteurs premiers donne alors que $|f(n)| < 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Numérotons les éléments de $\mathcal{P}$ par $p_1 < p_2 < \ldots$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ non nul posons $u_k = f(p_k)$ et soient

$$\forall M \in \mathbb{N},\ S_M := \sum_{n=1}^{M} f(n),\ S := \lim_M S_M.$$

Pour $N, q \geqslant 1$ des entiers posons $I_{N,q} := \{n \geqslant 1\ ;\ \forall k = 1,\ldots N,\ v_{p_k}(n) \leqslant q\} \subset \mathbb{N}$ où v_{p_k} est la valuation p_k-adique. C'est l'ensemble des entiers produits de puissances de $p_1,\ldots,p_N$ ne dépassant pas q. C'est un ensemble fini de cardinal $(q+1)^N$. Si $n \notin I_{N,q}$ ou bien n admet un facteur premier $> p_N$ ou bien il a un facteur de la forme $p_j^{\alpha_j}$ avec $\alpha_j > q$ et donc $n > 2^q$. Il en résulte que pour $I_{N,q} \subset [1, M]$:

$$\left|S_M - \sum_{n\in I_{N,q}} f(n)\right| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant M\\ n\notin I_{N,q}}} |f(n)| \leqslant \sum_{n>\min(p_N,2^q)} |f(n)|$$

donc en passant à la limite sur M on obtient

$$\left| S - \sum_{n \in I_{N,q}} f(n) \right| \leqslant \sum_{n > \min(p_N, 2^q)} |f(n)|.$$

Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$ on a $f(n) = \prod_{k=1}^N u_k^{\alpha_k}$ donc

$$\sum_{n \in I_{N,q}} f(n) = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{\alpha_k=0}^q u_k^{\alpha_k} \right) = \prod_{k=1}^N \frac{1 - u_k^{q+1}}{1 - u_k}.$$

L'estimation précédente s'écrit alors

$$\left| S - \prod_{k=1}^N \frac{1 - u_k^{q+1}}{1 - u_k} \right| \leqslant \sum_{n > \min(p_N, 2^q)} |f(n)|.$$

En passant à la limite $q \to \infty$ à N fixé on obtient

$$\left| S - \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - u_k} \right| \leqslant \sum_{n > p_N} |f(n)|.$$

On passe maintenant à la limite sur N. Par hypothèse $\sum_k |u_k| < \infty$ et donc $\prod_{k=1}^\infty (1 - u_k)^{-1}$ converge et on a montré

$$S = \prod_{k=1}^\infty \frac{1}{1 - u_k}.$$

2. De la question précédente, on obtient comme corollaire que $\sum_n f(n) \neq 0$. Comme $n \mapsto n^{-s}$ est complètement multiplicative et sommable dès que $\Re s > 1$, il vient

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \neq 0.$$

3. On commence par montrer qu'il existe $z \in D$ et un entier $N \geqslant 1$ tel que $(1-z)^{-N} = w$. On choisit une détermination principal du logarithme, on a alors

$$z = 1 - \exp\left(\frac{u}{N}\right), u \coloneqq \log w.$$

Donc pour N assez grand, $z \in D$ ce qui conclut. On définit f complètement multiplicative sur $\mathcal{P}$ par

$$f(p_j) = \begin{cases} z & \text{pour } j \leqslant N, \\ 0 & \text{pour } j > N. \end{cases}$$

Il est clair que f est sommable et que

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \prod_{j=1}^\infty \frac{1}{1 - f(p_j)} = \frac{1}{(1-z)^N} = w.$$

Exercice 3. Théorème de Lommel

1. Notons que l'équation différentielle s'écrit $(zy')' + zy = 0$. On a $zy' = \sum_{n=1}^\infty n a_n z^n$ donc $(zy')' = \sum_{n=0}^\infty (n+1)^2 a_{n+1} z^n$ alors que $zy = \sum_{n=1}^\infty a_{n-1} z^n$. Ainsi $a_1 = 0$ et l'équation différentielle devient

$$n \geqslant 1 \implies (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}.$$

Par récurrence on en déduit que les a_n d'indice impaire sont nuls et que

$$a_{2n+2} = \frac{-1}{4(n+1)^2} a_{2n}, \;\; a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0.$$

Ceci conclut.

2. Soit $u(z) \coloneqq J_0(\alpha z)$ et $v(z) \coloneqq J_0(\beta z)$. Alors u vérifie l'équation différentielle

$$\frac{z}{\alpha^2}u''(z/\alpha) + \frac{1}{\alpha}u'(z/\alpha) + zu(z/\alpha) = 0.$$

On change z en αz puis on multiplie par α pour obtenir :

$$\begin{aligned} zu'' + u' + \alpha^2 zu &= 0, \\ zv'' + v' + \beta^2 zv &= 0. \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par v et la seconde par $-u$ puis on les ajoute pour obtenir

$$(z(u''v - uv'') + u'v - uv') + (\alpha^2 - \beta^2)zuv = 0,$$

que l'on réecrit, en posant $f(z) \coloneqq z(u'v - uv')$ en l'équation

$$f' + (\alpha^2 - \beta^2)zuv = 0.$$

On a $f(0) = 0$, $u(1) = v(1) = 0$ donc $f(1) = 0$. Ainsi $\int_0^1 f'(x)dx = 0$ et en intégrant l'équation précédente on obtient

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)dx = 0.$$

3. On applique l'annulation précédente à $\beta = \bar{\alpha}$ pour trouver

$$(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2)\int_0^1 x|J_0(\alpha x)|^2 dx = 0.$$

L'intégrale est strictement positive et donc $(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2) = 0$. Ainsi on a montré que α est soit imaginaire pure soit réel. Si $\alpha = ia$ avec $a \in \mathbb{R}$ on obtient

$$J_0(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a/2)^{2n}}{(n!)^2} \geqslant 1.$$

On a bien montré que les zéros de J_0 sont tous réels.

4. Soit $|z| = r$. Par la majoration de la norme ℓ^2 par la norme ℓ^1 on obtient

$$|J_0(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^n}{n!}\right)^2 = (e^{r/2})^2 = e^r$$

5. Supposons que J_0 n'ait qu'un nombre fini de racines. Alors il existe un polynôme P et une fonction entière g tel que $J_0 = Pe^g$. Il existe alors $\delta, R > 0$ tels que $|z| \geqslant R \implies |P(z)|\delta$ et d'après la question précédente on obtient

$$|z| \geqslant R \implies e^{\Re g(z)} = |e^{g(z)}|e^{|z|}/\delta.$$

On a montré que $\Re g(z) \leqslant |z| + \ln(1/\delta)$ donc par le théorème de Liouville pour la partie réelle (appelé théorème de la partie réelle d'Hadamard) on en déduit que $g(z) = az + b$. Soit $J_0(z) = Q(z)e^{az}$ avec $Q = e^b P$. On voit que c'est bizarre et en effet comme J_0 est paire on obtient $Q(z)e^{2az} = Q(-z)$ ce qui implique par croissance comparée que $a = 0$ et $J_0 = Q$. Mais J_0 n'est pas un polynôme, ce qui conclut.

Espace des fonctions analytiques

Exercice 4. Un espace non complet

Soit $r \in]1/2, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $f_n(z) = \left(\frac{z}{r}\right)^n$ et montrons que la série des f_n est absolument convergente mais n'est pas convergente pour la norme considérée. On a $\|f_n\| = \left(\frac{1}{2r}\right)^n$ ce qui assure la convergence normale puisque $2r > 1$. Par définition, la série converge uniformément sur le disque $\overline{D}(0, 1/2)$. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{O}(D)$ telle que $\|\sum_{k=0}^n f_k - g\| \to 0$, alors on a pour $|z| \leqslant 1/2$ l'identité

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z/r)^k = \frac{1}{1 - z/r}.$$

Par prolongement analytique ceci reste vrai si $|z| < r$ ce qui est impossible puisque si $z \to r^-$ on a $g(z) \to g(r)$ mais le membre de droite diverge. Ainsi $\sum_k f_k$ est absolument convergente, non convergente et $\mathcal{O}(D)$ muni de cette norme n'est pas complet.

Exercice 5. Somme des modules bornée implique convergence normale

Soit $\gamma\colon [0,1] \to U$ un cycle entourant une fois chaque point de K. Premièrement remarquons que $\delta := \inf_{z\in K, w\in \operatorname{im}\gamma}|z-w| > 0$ puisque deux compacts disjoints ont une distance > 0. On applique la formule de Cauchy à f_n :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{z-w}dw,$$

d'où on obtient

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f_n(w)|}{|z-w|}|dw| \leqslant \frac{1}{2\delta\pi}\int_\gamma |f_n(w)||dw|.$$

Soit $M_n = \sup_{z\in K}|f_n(z)|$, alors on vient de montrer que $M_n \leqslant \frac{1}{2\delta\pi}\int_\gamma |f_n(w)||dw|$, d'où pour $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^N M_n \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\delta\pi}\int_\gamma |f_n(w)||dw| \leqslant \frac{M}{2\delta\pi}\int_\gamma |dw|.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum M_n$ sont majorées, donc la série converge, ce qui conclut.

Pour comparer au cas réel, posons $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$. si $0 \leqslant x < 1$ on a

$$\sum_{n=0}^\infty f_n(x) = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1.$$

Mais $f_n(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^n \sim e^{-1}n^{-1}$ qui est le terme général d'une série divergente.

Exercice 6. Une suite pas sans intérêt(s)

On va utiliser le théorème de Montel pour montrer la convergence. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $A = \sup_{z\in K}|z|$. Alors si $z \in K$, $n \geqslant 1$ un entier non nul alors

$$|f_n(z)| \leqslant \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n$$

la dernière suite étant convergente dans $\mathbb{R}$, donc bornée, on en déduit que $\mathcal{H} = \{f_n \ ; \ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est une partie bornée. Considérons $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente de $\mathcal{H}$ et notons g sa limite. On en déduit que $g(0) = 1$ et comme il existe un $N \geqslant n$ (dépendant de n) tel que

$$g_n'(z) = \frac{1}{1+\frac{z}{N}}g_n(z),$$

on en déduit à la limite que $g' = g$. Ainsi $z \mapsto e^{-z}g(z)$ est de dérivée nulle sur le connexe $\mathbb{C}$ elle est constante et donc $g(z) = e^z$. On a montré que $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{g\}$ et $g \notin \mathcal{H}$ puisque ce n'est pas un polynôme. Par le théorème de Montel, $\overline{\mathcal{H}}$ est compact dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et on a montré que g était la seule valeur d'adhérence de $\mathcal{H}$. Ainsi on a montré que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact vers $z \mapsto e^z$.

Exercice 7. L'algèbre du disque

1. Soit $f \in \mathcal{A}(D)$, avec $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ pour $z \in D$. Étant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver $r \in]0,1[$ tel que $\sup_{z\in\overline{D}}|f(z) - f(rz)| \leqslant \varepsilon$ par la continuité uniforme de f sur $\overline{D}$. On trouve ensuite $N \geqslant 0$ tel qu'en posant $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n r^n z^n$ on ait
$$\sup_{z\in\overline{D}}|f(rz) - P(z)| \leqslant \varepsilon,$$
et finalement $\|f - P\| \leqslant 2\varepsilon$.

2. On notera $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}(D)$ l'ensemble des fonctions unimodulaires. On a montré au premier exercice qu'un facteur de Blaschke, donc un produit fini de Blaschke, appartenait à $\mathcal{U}$. Soit $u \in \mathcal{U}$. Par la continuité uniforme de u sur $\overline{D}$, il existe $r \in]0,1[$ tel que $|u(z)| > \frac{1}{2}$ dès que $|z| \in]r,1[$. Ainsi, par le principe des zéros isolés, on en déduit que u n'a qu'un nombre fini, $a_1, \ldots, a_p$ de zéros dans D. Donc
$$u = v\prod_{n=1}^p \varphi_{a_n},$$
avec $v \in \mathcal{A}(D)$ sans zéros dans D. De plus, $v \in \mathcal{U}$ donc v n'a pas de zéros dans $\overline{D}$ et donc $\frac{1}{v} \in \mathcal{A}(D)$ mais par le principe du maximum $|1/v(z)| \leqslant 1$ pour $z \in D$ donc $|v(z)| \geqslant 1$ et finalement $|v(z)| = 1$ pour tout $z \in D$ ce qui conclut que v est une constante de module 1 et répond à la question. En particulier, ceci nous donne que tout monôme z^n est un produit fini de Blaschke !

3. Soit C la fermeture de l'enveloppe convexe de $\mathcal{U}$. Montrons d'abord que tout polynôme de norme < 1 appartient à C. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ tel que $\|f\| < 1$ et soit $f^*(z) = z^d \overline{f(1/\bar{z})}$ son polynôme réciproque complexe. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit $f_t \in \mathcal{A}(D)$ par
$$f_t(z) := \frac{e^{it} z^d + f(z)}{1 + f^*(z) e^{it}}.$$
Si $|z| = 1$ on reconnait un facteur de Blaschke puisqu'alors $f^*(z) = z^d \overline{f(z)}$ et donc $|f_t(z)| = 1$ i.e. $f_t \in \mathcal{U}$. Montrons maintenant que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_t(z) dt = f(z).$$
Supposons $z \in \mathbb{U}$ et notons $a = z^d$, $b = f(z)$ et $\varphi(w) = \frac{wa+b}{1+\bar{a}bw}$. On veut montrer
$$b = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) dt.$$
Il suffit de reconnaître la formule de Cauchy et $\varphi(0) = b$. Donc f s'écrit comme une intégrale de Riemann vectorielle d'unimodulaires dans $\mathcal{A}(D)$. En approchant dans $\mathcal{A}(D)$ cette integrale par des sommes de Riemann (comme dans la démonstration du théorème de Runge), qui sont des combinaisons convexes des unimodulaires f_t, on approche uniformément f par une combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{U}$ et donc $f \in C$. Si $\|f\| = 1$ on obtient $rf \in C$ pour $r \in]0, 1[$ et donc en faisant tendre $r \to 1$ on obtient $f \in C$. Finalement les polynômes sont denses dans $\mathcal{A}(D)$ et on conclut !

Exercice 8. Une partie compacte

D'après le théorème de Montel, $\mathcal{H}$ est une partie relativement compact de $\mathcal{O}(U)$. Montrons que $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{0\}$. Soit $f \in \mathcal{H}$, posons
$$f_n(z) = \frac{1}{n+1} f(z) \in \mathcal{H}.$$
Alors $f_n \to 0$ et donc $0 \in \overline{\mathcal{H}}$. Soit maintenant $f \in \overline{\mathcal{H}}$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{H}$ qui converge vers f dans $\mathcal{O}(U)$. On a $f(a) = 0$ et $\forall z \in U,\ |f(z)| \leqslant 1$; montrons que cette dernière inégalité est stricte. Soit $b \in U$ tel que $|f(b)| = 1$. Comme U est connexe le principe du maximum nous donne que $f(z) = f(b)$ pour tout $z \in U$ ce qui est absurde puisque $f(a) = 0$. Ainsi $\forall z \in U,\ |f(z)| < 1$. Montrons alors que soit $f \equiv 0$ soit f est injective, ce qui conclura.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur U convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f. Supposons premièrement que $0 \notin f_n(U)$ et montrons que $f \equiv 0$ ou $0 \notin f(U)$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et que $f \equiv 0$. D'après la connexité de U et le principe des zéros isolés on trouve qu'il existe $\overline{D}(a, r) \subset U$ tel que $f(z) \neq 0$ si $z \in \overline{D}(a, r) \setminus \{a\}$. Comme f est continue et que $f(z) \neq 0$ si $|z - a| = r$, il existe un réel $A > 0$ tel que $|f(z)| \geqslant A$ pour $|z - a| = r$. Par la convergence uniforme on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$|z - a| = r \implies |f(z) - f_n(z)| < \frac{A}{2} < A \leqslant |f(z)|.$$
D'après le théorème de Rouché on trouve que f_n a au moins un zéro dans $D(a, r)$, c'est une contradiction. Supposons maintenant que f_n est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$ et justifions que f est constante ou injective. Supposons qu'il existe $a, b \in U$ distincts tels que $f(a) = f(b)$. L'ouvert $V = U \setminus \{a\}$ est connexe. Pour $z \in V$ posons
$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(a),\ g(z) = f(z) - f(a).$$
Par ce qui précède on obtient $g \equiv 0$ i.e. $f(z) = f(a)$ pour tout $z \in U$. Ceci conclut l'argument.

Exercice 9. Une partie bornée

Fixons $b \in \mathbb{C} \setminus \overline{V}$. Il existe alors un réel $r \geqslant 0$ tel que $|b - z| \geqslant r$ pour tout $z \in \overline{V}$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$, on définit une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{O}(U)$ par
$$g_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - b}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in U$ il vient $|g_n(z)| \leqslant \frac{1}{r}$. Ainsi la suite $(g_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{O}(U)$ et d'après le théorème de Montel elle a au moins une valeur d'adhérence. Quitte à en extraire une sous-suite on peut supposer qu'elle a une limite g et donc $g(z) = \lim_n \frac{1}{f_n(z) - b}$ uniformément sur tout compact de U.

Justifions que $g \not\equiv 0$. En effet, sinon $|f_n(z) - b| \to \infty$ pour tout $z \in U$ et cela contredit le fait que la suite $(f_n(a))_n$ est bornée. Ainsi g n'a aucun zéro dans U par le même argument que dans l'exercice précédent. Posons alors

$$h(z) = b + \frac{1}{g(z)}.$$

Pour tout $z \in U$, la suite $(f_n(z))_n$ converge vers $h(z)$ et on va prouver que cette convergence est uniforme sur tout compact de U. Soit $K \subset U$ un compact, $m = \inf_{z \in K} |g(z)| > 0$ et $\varepsilon \in]0, m[$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$z \in K, n \geqslant N \implies \left| g(z) - \frac{1}{f_n(z) - b} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc

$$z \in K, n \geqslant N \implies \left| -\frac{1}{f_n(z) - b} \right| \geqslant |g(z)| - \varepsilon \geqslant m - \varepsilon,$$

soit

$$z \in K, n \geqslant N \implies |f_n(z) - b| \leqslant \frac{1}{m - \varepsilon}.$$

Donc pour $z \in K, n \geqslant N$ on a

$$|h(z) - f_n(z)| = \left| b + \frac{1}{g(z)} - f_n(z) \right| \leqslant \left| \frac{f_n(z) - b}{g(z)} \right| \cdot \left| g(z) - \frac{1}{f_n(z) - b} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{m(m - \varepsilon)}.$$

Ceci conclut.

Exercice 10. Contre-exemple pour Runge

1. Posons $K_n := \overline{D}(0, \frac{n-1}{n})$, qui est une suite exhaustive de compacts de D. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_n$. On voit que le complémentaire de K_n dans D est connexe. D'après le théorème de Runge, il existe une suite de polynômes convergeant uniformément sur K_n vers f.

2. Posons $f(z) = \frac{1}{1-z}$, on a alors $f \in \mathcal{O}(D)$. Supposons qu'il existe un polynôme P tel que $|P(z) - f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^\times$ tel que $|f(z)| \leqslant A$ sur D, mais c'est absurde. Donc f n'est pas limite uniforme de polynôme sur D.