Analyse complexe, Exercices n° 6 :

Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 17 avril 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

Fonctions entières et méromorphes

Exercice 1. Théorème de Casorati-Weierstrass

1. Notons que la fonction exponentielle vérifie presque cette propriété, mais elle n'est pas surjective sur $\mathbb{C}$. On considère
$$f(z) = \int_{[0,z]} e^{u^2} du.$$
On a $f'(z) = e^{z^2}$ donc f est localement inversible. Supposons que l'image de f manque un point $w \in \mathbb{C}$, alors la fonction entière $\varphi(z) = f(z) - w$ ne s'annule pas donc $\varphi(z) = e^{g(z)}$ pour g entière. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $r = |z| \geqslant |w|$:
$$e^{\Re g(z)} = |e^{g(z)}| \leqslant |f(z)| + |w| \leqslant |z|e^{|z|^2} + |w| \leqslant 2|z|e^{|z|^2} = 2re^{r^2}.$$
Ainsi, en notant $A(r) = \sup_{|z|=r} |\Re g(z)|$ on a $A(r) \leqslant \log(2r) + r^2 = O(r^2)$. Le théorème d'Hadamard assure alors que $g(z) = az^2 + bz + c$. En dérivant on obtient $f'(z) = (2az+b)e^{az^2+bz+c} = e^{z^2}$ et donc $a = 0$. Mais $e^{z^2} = be^{bz+c}$ est impossible. On a montré par l'absurde que f est surjective.

2. Supposons que l'image de f n'est pas dense. Alors il existe $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|f(z) - a| \geqslant r$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Mais alors la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ est entière est bornée par $\frac{1}{r}$ donc c'est une constante c par le théorème de Liouville. C'est une contradiction.

3. Si f manque toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+$ alors la fonction entière $\sqrt{f}$ manque toutes les valeurs réelles et par connexité elle prend ses valeurs dans le demi-plan supérieur ou inférieur. Dans les deux cas, l'image de $\sqrt{f}$ n'est pas dense donc elle est constante.

Exercice 2. Théorème de Mittag-Leffler

1. Les formules de Cauchy nous donnent, avec $c_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}$:
$$\sum_{k=N}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=r} F(w) \sum_{k=N}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=r} F(w) \frac{z^N}{w^{N+1}(1-z/w)} dw = \frac{z^N}{2i\pi} \int_{|w|=r} \frac{F(w)}{w^N(w-z)} dw$$

2. La première inégalité se déduit de la majoration sup-longueur :
$$\left| \frac{z^N}{2i\pi} \int_{|w|=r} \frac{F(w)}{w^N(w-z)} dw \right| \leqslant \frac{|z|^N}{2\pi} \int_{|w|=r} \left| \frac{F(w)}{w^N(w-z)} \right| |dw| \leqslant \left(\frac{|z|}{r} \right)^N \frac{rM(r)}{r-|z|}.$$
La seconde inégalité s'en déduit directement lorsque $|z| \leqslant \frac{r}{2}$.

3. Posons $R_n \coloneqq |z_n|$, on peut supposer que $R_n \neq 0$. La fonction f_n est holomorphe dans $D(0, R_n)$; soit $r_n = R_n/2$ et soit $M_n = \sup_{|z|=r_n} |f_n(z)|$. D'après la question précédente, il existe un polynôme p_n de degré N_n (que l'on fixera après) tel que
$$\sup_{|z|=R_n/4} |f_n(z) - p_n(z)| \leqslant 2^{-N_n+1} M_n.$$
Quitte à ajuster N_n de sorte à avoir $2^{-N_n+1}M_n \leqslant 2^{-n}$ on obtient que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - p_n)$ converge normalement sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$ après omission d'un certain nombre de premiers termes. De plus, ça somme définit une fonction f, méromorphe sur $\mathbb{C}$ donc la partie principale en z_k est f_k, puisque le terme $-p_k$ et $\sum_{n\neq k}^{\infty} (f_n - p_n)$ forment une série uniformément convergente de fonctions holomorphes au voisinage de z_k.

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 3. Équation de Guichard

1. Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on résout l'équation $f_n'(z) = z^n$ en posant $f_n(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Puis on superpose les solutions et on pose
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n.$$
Cette série a le même rayon de convergence que g et donc $Df = g$, ce qui montre la surjectivité de D.

2. Posons $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini récursivement par $B_0 = 1$, $D(B_{n+1}) = (n+1)B_n$, $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$. Ainsi B_n est de degré n et on obtient
$$B_1(z) = z - \frac{1}{2},\ B_2(z) = z^2 - z + \frac{1}{6},\ B_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}.$$
Par construction on a $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geqslant 2$ ou $n = 0$ et $B_1(1) - B_0(0) = 1$; en effet, pour $n \geqslant 2$ on a
$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0.$$
On utilise maintenant la formule de Taylor pour obtenir
$$B_n(z+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(1)z^k,\ B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(0)z^k.$$
Ainsi $B_n(z+1) - B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(B_{n-k}(1) - B_{n-k}(0))z^k = nz^{n-1}$ ce qui donne la première relation. On traduit cette relation : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_x^{x+1} B_{n+1}'(t)dt = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)) = x^n.$$
La formule de Taylor sur les polynômes s'écrit
$$\Delta = e^D - \mathrm{id}.$$
Ainsi, si $Q = D^{-1}P$, la primitive d'un polynôme P sans coefficient constant, alors on a
$$Q(X+1) - Q(X) = \int_X^{X+1} P(t)dt = \frac{e^D - \mathrm{id}}{D}P(X).$$
On inverse alors l'opérateur sur l'espace des polynômes pour trouver
$$\frac{e^D - \mathrm{id}}{D}P = R \implies P = \frac{D}{e^D - \mathrm{id}}R = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n D^n R,$$
avec $t/(e^t - 1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n t^n$ formellement. Or, la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ se développe en série entière convergente pour $|t| < 2\pi$ sous la forme
$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n!}t^n.$$
Pour les polynômes de Bernoulli ceci donne
$$B_n(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j \binom{n}{j} z^{n-j},\ \forall z \in \mathbb{C}$$
de sorte que $b_j = B_j(0)$. On reconnait dans la formule précédente le n-ième coefficient d'un produit de Cauchy des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n!}t^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}t^n$ donc on trouve
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n(z)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{zt}}{e^t - 1}.$$
La dernière formule est alors une application de la formule de Cauchy.

3. Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Formellement, on peut poser $f_n(z) = \frac{B_{n+1}(z)}{n+1}$ puis

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n.$$

Formellement, on a alors $\Delta f = g$. Pour corriger le problème de convergence dans cette procédure, on va construire des fonctions entières T_n de période 1, et considérer

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (f_n + T_n),$$

ce qui donnera toujours $\Delta f = g$ puisque $\Delta T_n = 0$. Posons $R_n = (2n+1)\pi$ et

$$F_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|t|=R_n} \frac{e^{tz}}{(e^t - 1)t^n} dt.$$

Alors le théorème des résidus donne

$$F_n(z) - B_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{2i\pi} 2i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{tz}}{(e^t-1)t^n}, 2ik\pi\right) = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2ik\pi z}}{(2ik\pi)^n}.$$

Posons alors $T_n(z) \coloneqq F_n(z) - B_n(z)$, on va montrer que la série corrigée converge sur tout compact. On commence par montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que si $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|z| = (2n+1)\pi \implies |e^z - 1| \geqslant \delta.$$

Supposons le contraire. Alors il existe une suite d'entiers $(n_k)_k$ strictement croissante ainsi qu'une suite $(z_k)_k = (a_k + ib_k)$ de complexes avec $|z_k| = (2n_k+1)\pi$ et $e^{z_k} \to 1$. En prenant les modules on obtient $e^{a_k} \to 1$ donc $a_k \to 0$. Donc

$$b_k = \pm\sqrt{(2n_k+1)^2\pi^2 - a_k^2} = \pm(2n_k+1)\pi\sqrt{1 - \frac{a_k^2}{(2n_k+1)^2\pi^2}} = \pm(2n_k+1)\pi + \delta_k$$

avec $\delta_k \to 0$. Mais on obtient alors $e^{z_k} \to -e^{a_k} e^{i\delta_k} \to -1$ contrairement à l'hypothèse. On va maintenant borner en norme les F_n :

$$|F_n(z)| \leqslant n!(2n+1)\pi \frac{1}{\delta} \frac{e^{(2n+1)\pi|z|}}{[(2n+1)\pi]^n} \leqslant \frac{e^{(2n+1)\pi|z|}}{\delta[(2n+1)\pi]^{n-1}}.$$

On obtient ensuite pour tout entier $n \geqslant 1$ et réel $a \geqslant 0$:

$$|c_n| \frac{n^n e^{(2n+1)\pi a}}{[(2n+1)\pi]^{n-1}} \leqslant |c_n| \frac{n^n e^{(2n+1)\pi a}}{n^n} = |c_n| e^{(2n+1)\pi a}$$

or $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| e^{(2n+1)\pi a} < \infty$ pour tout $a > 0$ puisque $g(z)$ est une fonction entière. On peut maintenant conclure que la série corrigée converge uniformément sur tout compact.

Théorème des résidus

Exercice 4. Calcul d'intégrales

Soit $n > 1$ un entier. Calculons

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^n}.$$

On applique le théorème des résidus à $f(z) = 1/(1+z^n)$, qui est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, le long d'une courbe fermée γ_R qui est le bord d'un secteur angulaire d'angle $2\pi/n$ et de longueur $R \in \mathbb{R}_+$. Les pôles de f sont les points $z_k = \exp((2k+1)i\pi/n)$ avec k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant \alpha$: z_0 est le seul de ces pôles est à l'intérieur du secteur et il est d'indice 1. On obtient

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, z_0) = 2i\pi \frac{1}{n z_0^{n-1}} = -2i\pi \frac{z_0}{n}.$$

On décompose l'intégrale en trois intégrales sur les trois portions de la courbe : la portion de cercle C_R et les deux intégrales rectilignes sur $[0, R]$ et $[0, Re^{2i\pi/n}]$ qui valent respectivement $I_n(R) = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n}$ et $e^{2i\pi/n} I_n(R)$. On obtient

$$I_n(R)(1 - e^{2i\pi/n}) + \int_{C_R} f(z)dz = -2i\pi \frac{z_0}{n}.$$

On va majorer l'intégrale sur la portion de cercle, on a

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leqslant l(C_R) \sup_{z\in C_R} \frac{1}{|1+z^n|} \leqslant \pi R \frac{1}{R^n - 1} = O(R^{1-n}).$$

Donc en passant à la limite, on obtient $(e^{2i\pi/n} - 1)I_n = 2i\pi \frac{e^{i\pi/n}}{n}$ et finalement

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Ce résultat est valable pour n non entier.

Calculons la transformée de Fourier

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^4} dt,$$

de $\varphi(t) = 1/(1+t^4)$. On considère $f(z) = e^{-izx}\varphi(z)$ et on complète le segment $[-R, R]$ par un demi cercle C_R dans le demi-plan supérieur pour donner une courbe fermée γ_R. On veut $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) = 0$ et on a

$$\left|\int_{C_R} f(z)\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^4 - 1} \sup_{z\in C_R} |e^{-izx}|,$$

or si $z = u + iv$ on trouve $|e^{-izx}| = e^{xv}$ et le second membre ne peut tendre vers 0 quand $R \to \infty$ uniquement si $vx < 0$. Fixons $x < 0$ et le contour situé dans le demi-plan supérieur donne $\sup_{z\in C_R} |e^{-izx}| \leqslant 1$ ce qui conclut que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) = 0$. Les quatre pôles de f sont simples et deux d'entre eux sont à l'intérieur de γ_R : $e^{i\pi/4}$ et $e^{3i\pi/4}$. Comme ils sont simples d'indice 1 on obtient

$$I(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{3i\pi/4})).$$

On calcule les résidus, sachant que $e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ et $e^{3i\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$, on trouve

$$\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{3i\pi/4}) = \frac{e^{-ix(1+i)/\sqrt{2}}}{4e^{3i\pi/4}} + \frac{e^{-ix(-1+i)/\sqrt{2}}}{4e^{i\pi/4}} = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}(1+i)} \left(-ie^{-ix/\sqrt{2}} + e^{ix/\sqrt{2}}\right).$$

Donc pour $x < 0$ on trouve

$$I(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{x/\sqrt{2}} \left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}} - \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

et la parité assure que pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^4} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-|x|/\sqrt{2}} \left(\cos\frac{|x|}{\sqrt{2}} + \sin\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right).$$

Calculons

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{x} dx.$$

On va utiliser un contour similaire au précédent sur la fonction $f(z) = z^{-1}e^{iz}$. Le contour $\gamma_{R,\varepsilon}$ est le même que précédemment mais on évite 0 par un petit demi-cercle C_ε où $\varepsilon > 0$ est un petit réel. Comme on n'a pas de pôle à l'intérieur du contour on obtient

$$0 = \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} x^{-1}e^{ix}dx + \int_{C_\varepsilon} z^{-1}e^{iz}dz + \int_\varepsilon^R x^{-1}e^{ix}dx + \int_{C_R} z^{-1}e^{iz}dz,$$

et puisque $\int_{-R}^{-\varepsilon} x^{-1}e^{ix}dx = -\int_\varepsilon^R x^{-1}e^{-ix}dx$ on obtient

$$0 = 2i\int_\varepsilon^R x^{-1}\sin(x)dx + \int_{C_\varepsilon} z^{-1}e^{iz}dz + \int_{C_R} z^{-1}e^{iz}dz.$$

Montrons que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} z^{-1}e^{iz}dz = -i\pi$. En effet $z^{-1}e^{iz} = \frac{1}{z} + g(z)$ où g est une fonction entière et $\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} = -\int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = -i\pi$ tandis que $\int_{C_\varepsilon} g(z)dz = O(\varepsilon) \to 0$. Montrons maintenant que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} z^{-1}e^{iz}dz = 0$, en utilisant que $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. On majore :

$$\left|\int_{C_R} z^{-1}e^{iz}dz\right| \leqslant \int_0^\pi |e^{iR(\cos t + i\sin t)}|dt \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-(2/\pi)Rt}dt \leqslant \frac{\pi}{R}.$$

On conclut donc à la limite que $2iI - i\pi = 0$ donc finalement

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Considérons une détermination principale du logarithme et calculons

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} dx.$$

On va considérer la fonction $f(z) = \frac{(\log z)^3}{1+z^2}$ et $\gamma_{R,\varepsilon}$ un contour « trou de serrure » constitué d'un petit cercle C_ε et d'un grand cercle C_R troué autour de l'axe réel et rejoint par deux segments $\mathcal{I}^+_{R,\varepsilon}$ et $\mathcal{I}^-_{R,\varepsilon}$ respectivement au dessus et en dessous de l'axe des réels. La fonction admet des pôles simples en i et $-i$ où les résidus sont

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{(\log i)^3}{2i} = -\frac{\pi^3}{16}, \ \operatorname{Res}(f, i) = \frac{(\log(-i))^3}{-2i} = \frac{27\pi^3}{16}$$

donc le théorème des résidus donne

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz = 2i\pi\left(-\frac{\pi^3}{16} + \frac{27\pi^3}{16}\right) = 13i\frac{\pi^4}{4}.$$

On majore les intégrales sur C_ε et C_R pour obtenir

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = O(|\log\varepsilon|^3\varepsilon) = o(1), \ \int_{C_R} f(z)dz = O(R\frac{(\log R)^3}{R^2}) = o(1).$$

De même, lorsque $R \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\int_{\mathcal{I}^+_{R,\varepsilon}} f(z)dz \to \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x)^3}{1+x^2}dx, \ \int_{\mathcal{I}^-_{R,\varepsilon}} f(z)dz \to -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x + 2i\pi)^3}{1+x^2}dx.$$

Par passage à la limite on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x)^3}{1+x^2}dx - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x + 2i\pi)^3}{1+x^2}dx = 13\frac{i\pi^4}{4}.$$

Les termes en $(\log x)^3$ disparaissent (!!) donc on trouve

$$-6i\pi\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}dx - 3(2i\pi)^2\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\log x}{1+x^2}dx + 8i\pi^3\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2} = 13\frac{i\pi^4}{4}.$$

En prenant la partie réelle on trouve $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$ (est-ce étonnant ?) puis comme $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ en prenant la partie imaginaire on obtient

$$-6\pi I + 4\pi^4 = 13\frac{\pi^4}{4}.$$

Finalement

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

Soit $a \in]0, 1[$, calculons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx.$$

On va intégrer la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ sur le rectangle γ_R centré en le pôle $i\pi$, de largeur 2π et de longueur $2R$. Les pôles de f sont les $i\pi + 2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc le contour considéré entoure un seul pôle avec indice 1 et donc par le théorème des résidus

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i\pi) = 2i\pi(-e^{ia\pi}).$$

On décompose l'intégrale suivant les portions du contour

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_0^{2\pi} f(R+it)idt - \int_{-R}^{R} f(x+2i\pi)dx - \int_0^{2\pi} f(-R+it)idt.$$

Les intégrales sur les cotés verticaux tendent vers 0 lorsque $R \to \infty$ puisque

$$\left| \int_0^{2\pi} f(R+it)idt \right| \leqslant 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1}, \quad \left| \int_0^{2\pi} f(-R+it)idt \right| \leqslant 2\pi \frac{e^{(1-a)R}}{e^R - 1},$$

et $a \in]0,1[$. Donc à la limite, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}(1-e^{2ia\pi})}{e^x+1} dx = -2i\pi e^{ia\pi},$$

donc finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -\frac{2i\pi e^{ia\pi}}{(1-e^{2ia\pi})} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Calculons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1}.$$

On intègre la fonction $f(z) = \frac{z-1}{z^5-1}$ le long du demi cercle de rayon R centré en 0, que l'on notera γ_R. Les seuls pôles contenu à l'intérieur de ce contour sont ω et ω^2 où $\omega = e^{2i\pi/5}$. Donc pour $R > 1$ on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(\operatorname{Res}(f,\omega) + \operatorname{Res}(f,\omega^2)).$$

On calcule les résidus :

$$\operatorname{Res}(f,\omega) = \frac{\omega-1}{5\omega^4} = \frac{\omega^2-\omega}{5}, \ \operatorname{Res}(f,\omega^2) = \frac{\omega^4-\omega^2}{5}.$$

Donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{2i\pi}{5}(-\omega+\omega^{-1}) = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

On fait tendre $R \to \infty$ et comme $\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta + \int_{-R}^R f(x)dx$ en notant que

$$R\int_0^\pi f(Re^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = O(R^{-3})$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Calculons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

On pose $f(z) = \frac{z^2e^z}{1+e^{2z}}$ que l'on va intégrer le long d'un rectangle γ_R de sommets $\pm R, \pm R + i\pi$. On vérifie, comme précédemment que

$$\int_{[-R+i\pi,-R]} f(z)dz = o(1), \ \int_{[R,R+i\pi]} f(z)dz = o(1)$$

lorsque $R \to \infty$. Soit $z_0 = i\pi/2$ l'unique pôle de la fonction à l'intérieur du contour. Le théorème des résidus donne

$$\int_{-R}^R f(x)dx - \int_{-R}^R f(x+i\pi)dx + o(1) = 2i\pi \operatorname{Res}(f,z_0)$$

On calcule le résidu : $\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{z_0^2e^{z_0}}{2e^{2z_0}} = \frac{i\pi^2}{8}$. Ainsi, en passant à la limite :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x+i\pi)^2e^{x+i\pi}}{1+e^{2x}} dx - \frac{\pi^3}{4}.$$

Notons que par l'imparité de la fonction :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{xe^x}{1+e^{2x}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\cosh x} dx = 0.$$

Mais aussi [1]

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement on obtient $I = -I + \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4}$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2e^x}{1+e^{2x}}dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

Calculons

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin x}{x}dx.$$

On considère la fonction $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}\frac{e^{iz}}{z}$ sur $\gamma_{R,\varepsilon}$, le demi-cercle évitant 0. Le seul pôle dans ce contour est le pôle en i ce qui donne

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f,i) = \frac{2i\pi}{e}.$$

On décompose l'intégrale suivant les portions du contour :

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz.$$

Comme $\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx = \int_{\varepsilon}^{R} f(-x)dx$ on obtient

$$\frac{2i\pi}{e} = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz.$$

Comme le résidu de f en 0 vaut -1, $f(z) = -\frac{1}{z} + g(z)$ avec g holomorphe au voisinage de 0 donc on trouve

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}}dt = i\pi.$$

On utilise maintenant l'inégalité $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour obtenir que si $R \geqslant 2$:

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leqslant 4\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}dt \leqslant \frac{2\pi}{R}.$$

Finalement en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$ on obtient $\frac{2i\pi}{e} = 2iI + i\pi$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin x}{x}dx = \pi\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right).$$

La dernière intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}dx,$$

se calcule le long du contour « trou de serrure » $\gamma_{R,\varepsilon}$ que l'on a déjà utilisé, en considérant $f(z) = \frac{\log^2 z}{(z+a)^2+b^2}$ qui est holomorphe dans $\Omega \coloneqq \mathbb{C} \setminus [0,\infty[$. On choisit R assez grand pour que le contour contienne les deux pôles de f i.e. $-a \pm ib$ que l'on écrit en polaire pour calculer les deux résidus :

$$-a+ib = re^{i\theta_0},\ r = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta_0 = \pi - \arctan(b/a),$$
$$-a-ib = re^{i\theta_1},\ r = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta_1 = \pi + \arctan(b/a)$$

Ainsi,

$$\operatorname{Res}(f,-a+ib) = \frac{1}{2ib}(\log r + i\theta_0)^2,$$
$$\operatorname{Res}(f,-a-ib) = \frac{1}{2ib}(\log r + i\theta_1)^2,$$

D'où

$$A + iB \coloneqq \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz = \frac{2i\pi}{2ib}\left((\log r + i\theta_0)^2 - (\log r + i\theta_1)^2\right)$$

1. C'est aussi l'intégrale de $\frac{1}{2}\cosh(x)^{-1}$ donnée par le théorème de von Dantzig

soit, tous calculs faits,

$$A + iB = \frac{\pi}{b}(4\pi \arctan\frac{b}{a} - 4i \arctan\frac{b}{a}\log\sqrt{a^2+b^2})$$

Les différents passages à la limite sont laissés aux lecteurs. On obtient finalement

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\log^2 x}{(x+a)^2+b^2}dx - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{(\log x + 2i\pi)^2}{(x+a)^2+b^2}dx = A + iB.$$

En développant puis simplifiant il reste

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{4\pi^2 - 4i\pi\log x}{(x+a)^2+b^2}dx = A + iB,$$

dont on identifie les parties imaginaires pour trouver

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{\log\sqrt{a^2+b^2}}{b}\arctan\frac{b}{a}.$$

Exercice 5. Théorème de von Dantzig

1. Rappelons les identités importantes $\cosh(iu) = \cos u$ et $\sinh(iu) = i\sin u$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction méromorphe

$$f(z) = e^{-2i\pi zx}\frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi z) + \cos(\pi a)},$$

que l'on va intégrer sur le contour rectangulaire γ_R de sommets R, $R+2i$, $-R+2i$, $-R$ où $R > 0$ est un réel que l'on fera tendre vers l'infini. Les pôles de f sont les solutions de l'équation

$$\cosh(\pi z) + \cos(\pi a) = 0 \iff e^{2\pi z} + 2e^{\pi z}\cos(\pi a) + 1 = 0.$$

Ce sont donc deux pôles simples en $\alpha = i(1-a)$ et $\beta = i(1+a)$ et le théorème des résidus nous donne

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,\alpha) + \mathrm{Res}(f,\beta)).$$

Calculons les résidus, on trouve

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{e^{-2i\pi\alpha x}\sin(\pi a)}{\pi\sinh(\pi\alpha)} = \frac{e^{2\pi(1-a)x}\sin(\pi a)}{i\pi\sin(\pi - \pi a)} = \frac{e^{2\pi(1-a)x}}{i\pi}.$$

et de même, $\mathrm{Res}(f,\beta) = -\frac{e^{2\pi(1+a)x}}{i\pi}$. Ainsi on trouve

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -4e^{2\pi x}\sinh(2\pi ax).$$

On décompose maintenant l'intégrale suivant les quatre intégrales sur les segments

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_0^2 f(R+iu)idu + \int_R^{-R} f(t+2i)dt + \int_2^0 f(-R+iu)idu,$$

puis on fait tendre $R \to \infty$ pour obtenir que les intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0 : en effet, par exemple pour la première, en minorant $|\cosh(\pi(R+iu))|$ via $|\cosh(x+iy)|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$, on a pour R assez grand

$$|f(R+iu)| \leqslant \frac{e^{2\pi u|x|}}{\sinh(\pi R) - 1},$$

et

$$\left|\int_0^2 f(R+iu)idu\right| \leqslant 2\sup_{0\leqslant u\leqslant 2}|f(R+iu)| \leqslant \frac{2e^{4\pi|x|}}{\sinh(\pi R) - 1}.$$

On regroupe les deux intégrales restantes en observant que

$$f(z+2i) = e^{-2i\pi zx}e^{4\pi x}\frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi z) + \cos(\pi a)} = e^{4\pi x}f(z),$$

ce qui donne, en notant $I(x)$ l'intégrale à calculer, que

$$(1 - e^{4\pi x})I(x) = -4e^{2\pi x}\sinh(2\pi ax),$$

ce qui conclut.

2. C'est une application directe de la formule précédente au cas où $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Calcul de sommes de séries

1. Si $z = x + iy$, on a $\sin(\pi z) = \sin(\pi x)\cosh(\pi y) + i\sinh(\pi y)\cos(\pi x)$, d'où

   $$|\sin(\pi z)|^2 = \sin(\pi x)^2\cosh(\pi y)^2 + \sinh(\pi y)^2\cos(\pi x)^2 = \sin(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2(\sin(\pi x)^2 + \cos(\pi x)^2) = \sin(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2$$

   et de même $|\cos(\pi z)|^2 = \cos(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2$. Ainsi quand $z = \pm(N + \frac{1}{2}) + iy$ appartient à l'un des cotés verticaux du carré on a

   $$|\mathrm{cotan}(\pi z)| = \frac{\sinh(\pi y)^2}{1 + \sinh(\pi y)^2} \leqslant 1.$$

   De plus, quand $z = x \pm i(N + \frac{1}{2})$ on a

   $$|\mathrm{cotan}(\pi z)| = \frac{\cos(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2}{\sin(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2} \leqslant \frac{1 + \sinh(\pi y)^2}{\sinh(\pi y)^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\sinh(\pi/2)^2}.$$

   On en déduit la première assertion. Maintenant, puisque $f(z) = O(|z|^{-2})$ et la longueur de γ_N est $\ell_N = 4(2N+1) = O(N)$ on a

   $$\left|\int_{\gamma_N} f(z)\mathrm{cotan}(\pi z)dz\right| \leqslant \sup_{z \in \mathrm{im}\,\gamma_N} |f(z)\mathrm{cotan}(\pi z)|\ell_N.$$

   Finalement

   $$\left|\int_{\gamma_N} f(z)\mathrm{cotan}(\pi z)dz\right| = O(N^{-1}),$$

   ce qui montre ce qu'on voulait.

2. On applique le théorème des résidus à la fonction méromorphe $g(z) = f(z)\pi\mathrm{cotan}(\pi z)$ qui a des poles en les a_j et en les points entiers. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le calcul usuel des résidus donne $\mathrm{Res}(g, n) = f(n)$ et on a $\mathrm{Res}(g, a_j) = \mathrm{Res}(f, a_j)\pi\mathrm{cotan}(\pi a_j)$. Pour N assez grand pour que les a_j soient tous à l'intérieur de γ_N le théorème des résidus nous donne

   $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} f(z)\pi\mathrm{cotan}(\pi z)dz = \sum_{|n| \leqslant N} f(n) + \pi\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}(f, a_j)\mathrm{cotan}(\pi a_j).$$

   Le passage à la limite et le résultat de la question précédente donnent alors le résultat.

3. D'après la preuve précédente, on peut établir que pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on a

   $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n-a)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\right)^2.$$

   En effet, le développement limité de la cotangente en a donne

   $$\frac{\pi\mathrm{cotan}(\pi z)}{(z-a)^2} = \frac{\pi\mathrm{cotan}(\pi a)}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z-a)}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\right)^2,$$

   ce qui permet d'établir la formule. Soient $f(a) = \pi\mathrm{cotan}(\pi a)$ et

   $$g(a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right).$$

   Par dérivation on a

   $$g'(a) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n-a)^2} = -\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\right)^2,$$

   donc $f'(a) = g'(a)$ et donc $f(a) - g(a)$ est une constante qui, par le développement limité de la cotangente, est nulle. Ainsi, $f = g$.

4. On commence par un calcul, que l'on laisse le lecteur vérifier :

   $$\tan(x + iy) = \frac{\sin(2x) + i\sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}.$$

   On en déduit que si $z = x + iy$ est une solution de l'équation $\tan z = z$ on a $x\sinh(2y) = y\sin(2x)$. Ainsi, si $xy \neq 0$ on a $|y\sin(2x)| < |2xy| < |x\sinh(2y)|$ et l'égalité précédente est impossible. Si $x = 0$ et $y \neq 0$ on a $\tan(iy) = i\tanh y = iy$ ce qui est impossible puisque $|\tanh(y)| > |y|$. Ceci conclut que les racines de $\tan z = z$ sont réelles.

5. Posons $f(z) = \sin z - z\cos z$ et soit
$$g(z) = \frac{1}{z^2}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\tan z}{z(\tan z - z)}.$$
On calcule les résidus, si $n \geqslant 1$ on a $\operatorname{Res}(g, \lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n^2}$. On en déduit, sur le même contour que précédemment :
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} g(z)dz = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n^2} + \operatorname{Res}(g, 0).$$
Une estimation comme précédemment permet d'établir que l'intégrale tend vers 0 et donc que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Res}(g, 0)$.
À partir de $\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots$ on en déduit $\tan z - z = \frac{z^3}{3}\left(1 + \frac{2z^2}{5} + \dots\right)$ puis que
$$g(z) = \frac{3}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2z^4}{15} + \dots\right)\left(1 + \frac{2z^2}{5} + \dots\right)^{-1} = \frac{3}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{2z^4}{15} + \dots\right)\left(1 - \frac{2z^2}{5} + \dots\right) = \frac{3}{z^3} - \frac{1}{5z} + \dots$$
D'où $\operatorname{Res}(g, 0) = -\frac{1}{5}$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10}$.

6. Montrons que la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Posons $\varepsilon_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - \lambda_n$, alors $0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(\frac{\pi}{2} + n\pi - \varepsilon_n) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \varepsilon_n$. Or la périodicité de la fonction tangente assure que $\tan(\frac{\pi}{2} + n\pi - \varepsilon_n) = \operatorname{cotan}(\varepsilon_n)$. On en déduit
$$\operatorname{cotan}(\varepsilon_n) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \varepsilon_n \to \infty,$$
donc $\varepsilon_n \to 0$. Ainsi $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi - \varepsilon_n} = \tan(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ et donc $\varepsilon_n \sim 1/n\pi$. Ceci montre que $|\sin(\lambda_n)| = \cos(\varepsilon_n) \to 1$ donc $|\sin(\lambda_n)| \geqslant \delta > 0$ et donc que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2\sin(\lambda_n)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Posons
$$g(z) = \frac{\sin(az)}{\sin z}\frac{1}{z^2}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\sin(az)}{z}\frac{1}{\sin z - z\cos z}.$$
La fonction $\frac{\sin(az)}{z}$ est entière donc les pôles de g sont exactement les zéros de $z \mapsto \sin z - z\cos z$ i.e. les $\pm\lambda_n$ et 0 puisque g est impaire, qui sont respectivement des pôles simples et triple en 0. On calcule les résidus :
$$\operatorname{Res}(g, \lambda_n) = \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2\sin(\lambda_n)} = \operatorname{Res}(g, -\lambda_n).$$
Il reste à calculer le résidu en 0 ce que l'on fait à l'aide d'un développement limité,
$$\sin z - z\cos z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - z\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24}\right) + o(z^5) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} + o(z^5),$$
ainsi
$$\frac{1}{\sin z - z\cos z} = \frac{3}{z^3}\frac{1}{1 - \frac{z^2}{10} + o(z^2)} = \frac{3}{z^3} + \frac{3}{10z} + o(\frac{1}{z}),$$
finalement
$$g(z) = \left(a - \frac{a^3}{6}z^2 + \frac{a^5}{120}z^4 + o(z^4)\right)\left(\frac{3}{z^3} + \frac{3}{10z} + o(\frac{1}{z})\right),$$
d'où $\operatorname{Res}(g, 0) = \frac{3a - 5a^3}{10}$. On applique maintenant le théorème des résidus sur le carré γ_N coupant les axes en $\pm(N\pi + \pi/2)$ et $\pm i(N\pi + \pi/2)$:
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} g(z)dz = 2\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Res}(g, \lambda_n) + \operatorname{Res}(g, 0).$$
Il reste à montrer que l'intégrale tend vers 0 lorsque $N \to \infty$, on montre même avec les méthodes usuelles que c'est un $O(N^{-1})$, pour obtenir que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2\sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3 - 3a}{20}.$$
Pour montrer que l'intégrale est un $O(N^{-1})$, on majore $|g(z)|$ sur les segments verticaux et horizontaux. Commençons par montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$z = \pm\left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right) + iy \implies |\sin z - z\cos z| \geqslant \delta.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe une suite (y_N) de réels tels que si on pose $z_N = \left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right) + iy_N$ on ait $\sin z_N - z_N \cos z_N \to 0$, soit encore puisque $\sin z_N = (-1)^N \cosh y_N$ et $\cos z_N = -(-1)^N i \sinh y_N$:

$$\cosh y_N + y_N \sinh y_N - i\left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sinh y_N \to 0.$$

En prenant la partie imaginaire, cela implique $(N\pi + \frac{\pi}{2})\sinh y_N \to 0$ donc $y_N \to 0$, mais alors en prenant la partie réelle, on trouve la contradiction $1 = 0$. Nous avons aussi pour une constante $\delta > 0$:

$$|y| \geqslant 3 \text{ et } z = \pm\left(N\pi + \frac{\pi}{2}\right) + iy \implies |\sin z - z\cos z| \geqslant \delta|z|\cosh|y|.$$

En effet, puisque $|z| \geqslant 2$ et

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} \geqslant \sinh|y| \geqslant \cosh|y| - 1$$
$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \leqslant \cosh|y|$$

il vient

$$|\sin z - z\cos z| \geqslant |z||\cos z| - |\sin z| \leqslant |z|(\cosh|y| - 1) - \cosh|y| \leqslant (|z| - 1)\cosh|y| - |z| \geqslant \frac{|z|}{2}\cosh|y| - |z| \geqslant \frac{|z|}{4}\cosh|y|,$$

puisque $|y| \geqslant 3 \implies \cosh|y| \geqslant e^{|y|}/2 \geqslant 4$. Maintenant, sur la partie des cotés verticaux où $|y| \leqslant 3$ on utilise la première implication pour avoir une majoration de g en $O(1/|z|)$. Sur la partie des cotés verticaux où $|y| \geqslant 3$ on utilise la deuxième implication ainsi que $|\sin(az)| \leqslant \cosh(a|y|) \leqslant \cosh|y|$ (puisque $a \leqslant 1$) pour avoir une majoration de g en $O(1/|z|^2)$. Cette dernière majoration fonctionne aussi sur les cotés horizontaux. Avec la majoration sup-longueur on en déduit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} g(z)dz = O(\frac{1}{N^2} \cdot N) + O(\frac{1}{N} \cdot O(1)) = O(\frac{1}{N}).$$

Exercice 7. Encore une somme de série

1. Le zéro $\frac{n}{a}$ étant simple pour la fonction $\sin(\pi az)$ et $\frac{a}{b}$ étant irrationnel, c'est un pôle simple pour f et il vient

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{n}{a}\right) = \frac{1}{(\frac{n}{a})^3 \sin(\pi b\frac{n}{a})} \frac{1}{\pi a\cos(\pi a\frac{n}{a})},$$

soit

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{n}{a}\right) = \frac{(-1)^n a^2}{\pi n^3 \sin(n\pi\frac{b}{a})} \text{ et de même } \operatorname{Res}\left(f, \frac{n}{b}\right) = \frac{(-1)^n b^2}{\pi n^3 \sin(n\pi\frac{a}{b})}$$

Le point $z = 0$ est un pôle de multiplicité 5, on doit donc développer f au voisinage de 0. Écrivons

$$f(z) = \frac{1}{\pi^2 abz^5}\left(\frac{\sin(\pi az)}{\pi az} \cdot \frac{\sin(\pi bz)}{\pi bz}\right)^{-1},$$

et

$$\frac{\sin(\pi az)}{\pi az} = 1 - \frac{\pi^2 a^2 z^2}{6} + \frac{\pi^4 a^4 z^4}{120} + o(z^4),$$

ainsi

$$\left(\frac{\sin(\pi az)}{\pi az}\right)^{-1} = 1 + \frac{\pi^2 a^2 z^2}{6} - \frac{\pi^4 a^4 z^4}{120} + \frac{\pi^4 a^4 z^4}{36} + o(z^4) = 1 + \frac{\pi^2 a^2 z^2}{6} + \frac{7\pi^4 a^4 z^4}{360} + o(z^4)$$

d'où

$$\left(\frac{\sin(\pi az)}{\pi az} \cdot \frac{\sin(\pi bz)}{\pi bz}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\pi^2 a^2 z^2}{6} + \frac{7\pi^4 a^4 z^4}{360} + o(z^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 b^2 z^2}{6} + \frac{7\pi^4 b^4 z^4}{360} + o(z^4)\right).$$

Finalement, le terme en z^4 nous donne $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{\pi^2}{360ab}(7(a^4 + b^4) + 10a^2b^2)$.

2. Prenant $a > b$, fixons N, soit $p \geqslant 1$ un entier avec $(p-1)/a < N/b < p/a$ et aussi $(N+1)/b > N/b + 1/a > p/a$. On choisit $r_N \in]p/a, (N+1)/b[$, plus précisément $r_N = p/a + d$ où $d = \inf(1/2a, (1/b - 1/a)/2)$ en notant que l'on a $(N+1)/b - p/a \geqslant 2d$. On vérifie que $\operatorname{dist}(r_N, \frac{1}{a}\mathbb{Z}) \geqslant d$, et $\operatorname{dist}(r_N, \frac{1}{b}\mathbb{Z}) \geqslant d$:

$$r_N - \frac{p}{a} = d, \ \frac{p+1}{a} - r_N = \frac{1}{a} - d \geqslant \frac{1}{2a} \geqslant d$$

a fortiori $|r_N - \frac{n}{a}| \geqslant d$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'autre part

$$r_N - \frac{N}{b} > r_N - \frac{p}{a} = d,\ \frac{N+1}{b} - r_N \geqslant \frac{p-1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{p}{a} - d \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \geqslant d;$$

a fortiori $|r_N - \frac{n}{b}| \geqslant d$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $r_N \to +\infty$.

3. On va distinguer deux cas, selon que le coté du carré est vertical ou horizontal.

   Si z décrit un coté vertical (que l'on peut supposer positif), $z = r_N + iy$ avec $|y| \leqslant r_N$. On sait que

   $$|\sin(\pi a z)|^2 = \sin^2(\pi a r_N) + \sinh^2(\pi a y) \geqslant \sin^2(\pi a r_N).$$

   Soit alors $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|r_N - n/a| \leqslant 1/2a$; alors $\pi a |r_N - n/a| \leqslant\leqslant \pi/2$ et

   $$|\sin(\pi a r_N)| = |\sin(\pi a(r_N - \frac{n}{a}))| \geqslant \frac{2}{\pi}\pi a|r_N - \frac{n}{a}| \geqslant 2ad.$$

   De même, en injectant m tel que $|r_N - n/b| \leqslant 1/2b$ il vient $|\sin(\pi b r_N)| \geqslant 2bd$. Finalement $\delta = 2bd$ convient pour ce coté.

   Si z décrit un coté horizontal, $z = x \pm i r_N$ avec $|x| \leqslant r_N$, et (puisque r_N croît)

   $$|\sin(\pi a z)| \geqslant \sinh(\pi a r_N) \geqslant \sinh(\pi a r_1),\ \ |\sin(\pi b z)| \geqslant \sinh(\pi b r_N) \geqslant \sinh(\pi b r_1),$$

   et cette fois $\delta = \sinh(\pi b r_1)$ convient pour ce coté. Finalement on pose $\delta = \inf(\sinh(\pi b r_1), 2bd)$.

4. Par le théorème des résidus

   $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} f(z)dz = \operatorname{Res}(f, 0) + \sum_{0<|n|<ar_N} \operatorname{Res}(f, \frac{n}{a}) + \sum_{0<|n|<br_N} \operatorname{Res}(f, \frac{n}{b}).$$

   Si $z \in \operatorname{im}\gamma_N$, on a $|z| \geqslant r_N$ et $|f(z)| \leqslant 1/\delta^2 r_N^3$, donc quand $N \to \infty$

   $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} f(z)dz = O\left(\frac{r_N}{r_N^3}\right).$$

   Il reste à la limite, et par parité

   $$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\operatorname{Res}(f, \frac{n}{a}) + \operatorname{Res}(f, \frac{n}{b})\right) = -\operatorname{Res}(f, 0).$$

   En remplaçant les résidus calculés à la première question on trouve

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\theta^2 \frac{(-1)^n}{n^3 \sin(n\pi/\theta)} + \frac{(-1)^n}{n^3\sin(n\pi\theta)}\right) = \frac{-\pi^3}{720}(7\theta^3 + \frac{7}{\theta} + 10\theta).$$

5. Ici, $\theta = \sqrt{2} + 1$ et $1/\theta = \sqrt{2} - 1$ si bien que

   $$\sin(n\pi/\theta) = \sin(n\pi\theta) = (-1)^n \sin(n\pi\sqrt{2})$$

   donc chacune des séries converge avec pour somme

   $$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin(n\pi\sqrt{2})},$$

   de plus $(\theta^2+1)S = \frac{-\pi^3}{720}(7\theta^3 + \frac{7}{\theta} + 10\theta)$ et la valeur de S s'en déduit.