Analyse complexe, Exercices n° 8 :

Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : 19 mai 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

Produit de Weierstrass

Exercice 1. Produits de Weierstrass généraux

1. Si $|z| < 1$ on a
$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{p} \frac{z^n}{n} - \frac{z^{p+1}}{p+1}\left[1 + \frac{(p+1)z}{p+2} + \dots\right].$$
La somme infinie entre crochet est majorée par $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = 1/(1-|z|)$, donc si $|z| \leqslant 1/2$ on obtient l'estimation voulue.

2. Supposons sans perte de généralité que les z_n soient tous non-nuls. Posons $r_n = |z_n|$ et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers croissante que l'on déterminera plus tard. On pose
$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} W_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$
On voit choisir la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que la suite converge uniformément sur tous compacts. Supposons que $|z| \leqslant r$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n \geqslant 2r$ et $N > n$. Alors l'estimation de la question précédente donne
$$\left|\log \prod_{k=n}^{N} W_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{2}{p_k+1}\left(\frac{r}{r_k}\right)^{p_k+1}.$$
Ainsi la convergence uniforme est assurée si on choisit les $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que pour tout $r > 0$ on ait
$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{p_k+1}\left(\frac{r}{r_k}\right)^{p_k+1} < \infty.$$
Le choix de $p_n = n-1$ convient puisqu'un nombre fini des r_n sont $\leqslant 2r$. Notons que ce choix est loin d'être optimal.

3. On choisit d de sorte à ce que $z^{-d}f(z)$ soit une fonction entière qui ne s'annule pas en 0. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des zéros, comptés avec multiplicité, de cette nouvelle fonction et soit P le produit de Weierstrass de ces zéros (ou simplement le polynôme si la suite est finie). Alors
$$g(z) = z^{-d}\frac{f(z)}{P(z)}$$
est une fonction entière qui ne s'annule pas. On peut ainsi choisir une branche du logarithme et définir $h(z) = \log g(z)$ ce qui conclut la preuve.

4. Soit h une fonction méromorphe. On considère la suite de ses pôles avec multiplicités et g le produit de Weirstrass associé à cette suite. Alors hg est holomorphe.

Exercice 2. Fonctions Beta et Gamma

1. On définit la fonction Gamma sur le demi plan $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$ par
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/` (tout commentaire est bienvenu.)

Par intégration par partie on montre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. On introduit la fonction

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n du =: n^z I_n(z).$$

C'est une approximation de la fonction Gamma puisque $\Gamma_n(z) = \int_0^\infty f_n(t)dt$ où $f_n(t) = t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t)$ et en posant $z = x+iy$ on trouve

$$|f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t} \text{ et } f_n(t) \to t^{z-1}e^{-t}.$$

Le théorème de convergence dominé montre donc que $\lim_n \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$. On exprime $I_n(z)$ différemment, par des intégrations par partie successives on a :

$$I_n(z) = \int_0^1 \frac{u^z}{z} n(1-u)^{n-1} du = \frac{n}{z} I_{n-1}(z+1) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

On en déduit en inversant

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} e^{-z\log n} = z\prod_{k=1}^n \left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right) e^{z(H_n - \log n)},$$

où $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ est la somme harmonique. Ainsi on considère le produit de Weirstrass de terme général $z_k = -k$ et on peut prendre $p_k = 1$; le produit de Weirstrass correspondant est alors uniformément convergent sur tous compacts et de la forme

$$P(z) = z\prod_{k=1}^\infty \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

On sait que $H_n - \log n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$, la constante d'Euler et donc $\lim_n \frac{1}{\Gamma_n(z)} = e^{\gamma z}P(z)$. Mais le produit P n'a aucun zéro dans Ω et donc $\lim_n \Gamma_n = e^{-\gamma z}P(z)^{-1} \neq 0$ et on en déduit que $\Gamma(z) \neq 0$ et finalement que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^\infty \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}},$$

pour tout $z \in \Omega$ et donc Γ se prolonge en une fonction méromorphe et $1/\Gamma$ en une fonction entière.

2. Avec le changement de variable $t = x^2$ ou $t = y^2$ on écrit

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx,\ \Gamma(q) = 2\int_0^\infty y^{2p-1}e^{-y^2}dy,$$

d'où par Fubini et un passage en polaire on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_{x,y\geqslant 0} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy = 4\int_{\substack{r\geqslant 0\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}r^{2p+2q-1}e^{-r^2}drd\theta$$

On sépare l'intégrale sur r et sur θ et on calcul par les changement de variable $r^2 = t$ et $\cos^2\theta = t$

$$\int_0^\infty r^{2p+2q-2}2re^{-r^2}dr = \Gamma(p+q),\quad \int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{p-1}(\sin^2\theta)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta = B(p,q)$$

Ainsi on a obtenu la formule $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$. Pour la formule des complément on doit calculer $B(p,1-p)$, supposons d'abord $0 < p < 1$. On a

$$B(p,1-p) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{-p}du = \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1}\frac{du}{1-u}.$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{u}{1-u}$ ce qui donne $\frac{1}{1+t} = 1-u$ et donc comme $dt = \frac{du}{(1-u)^2}$ on obtient $\frac{dt}{1+t} = \frac{du}{1-u}$ ce qui permet d'écrire l'intégrale

$$B(p,1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{1+t}.$$

On applique maintenant le changement de variable $x = t^p$, $dx = pt^{p-1}dt$ ce qui donne

$$B(p,1-p) = p^{-1}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{1/p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

En effet, on a déjà calculé la dernière intégrale par la formule des résidus, ce qui donne le résultat. Par prolongement analytique, on en déduit le résultat pour $p \notin \mathbb{Z}$. On aurait aussi pu calculer directement l'intégrale en t à l'aide d'un contour trou de serrure et de la formule des résidus.

3. On va prendre le logarithme de la formule obtenue à la première question. On obtient

$$\log \Gamma(z) = -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right] - \log z + z(H_{n-1} - \gamma) - \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) + O(n^{-1}).$$

Par definition de γ et en écrivant $1 + z/k = (z+k)/k$ on obtient

$$\log \Gamma(z) = -\log z + z \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+z) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \log(k)}_{=\log \Gamma(n)} + O(n^{-1})$$

On estime la somme des logarithmes :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log(k+z) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_z^{k+z} \frac{ds}{s} + \int_1^z \frac{ds}{s} \right] = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_0^k \frac{ds}{s+z} \right] + (n-1)\log z = \int_0^{n-1} \frac{n-1-[s]}{s+z} ds + (n-1)\log z,$$

où $s \mapsto [s]$ désigne la partie entière et l'intégrale s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_0^k \frac{ds}{s+z} \right] = (n-1) \int_0^1 \frac{ds}{s+z} + (n-2) \int_1^2 \frac{ds}{s+z} + \cdots + \int_0^{n-1} \frac{ds}{s+z} = \int_{n-2}^{n-1} \frac{n-1-[s]}{s+z} ds.$$

On va estimer cette intégrale, on l'écrit

$$\int_0^{n-1} \frac{n-1-[s]}{s+z} ds = \int_0^{n-1} \frac{n - \frac{1}{2} - s}{s+z} ds + \int_0^{n-1} \frac{n-1-[s]}{s+z} ds.$$

La première intégrale à droite s'estime facilement :

$$\int_0^{n-1} \frac{(n-\frac{1}{2}-z)-(z+s)}{s+z} ds = (n-\frac{1}{2}+z)[\log(n-1+z)-\log z]-(n-1) = (n-\frac{1}{2}+z)[\log n - \log z]+(z-1)-(n-1)+O(n^{-1})$$

La seconde intégrale à droite s'écrit

$$\int_0^{n-1} \frac{n-1-[s]}{s+z} ds = \int_0^{n-1} \frac{f(s)}{(s+z)^2} ds \text{ où } f(s) = \int_0^s \left(s - [s] - \frac{1}{2} \right) ds.$$

Pour $s \geqslant 0$ et $|\theta| = |\arg z| < \pi - \delta$ on a $\cos\theta \geqslant -1 + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donc

$$|z+s|^2 = |z|^2 + 2|z|s\cos\theta + s^2 \geqslant (|z|^2 + s^2)\min(1, 1+\cos\theta) \geqslant \varepsilon(|z|^2 + s^2)$$

Donc l'intégrale est un $O(|z|^{-1})$ uniformément dans le secteur considéré. Ces estimations combiné à la formule de Stirling habituelle, qui s'écrit $\log\Gamma(n) = (n - \frac{1}{2})\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + O(n^{-1})$ nous donne la formule voulue (détaille laissé au lecteur).

Exercice 3. La formule de Jensen

1. On commence par rappeler la formule

$$\Re f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(re^{i\theta}) d\theta.$$

Par continuité, il suffit de considérer $|z_n| \leqslant r \leqslant |z_{n+1}|$. On va utiliser les facteurs de Blaschke, posons

$$f_k(w) = \frac{w - w_k}{\bar{w}_k w - 1}, \; w_k = \frac{z_k}{r}.$$

On sait que $f_k(w)$ est de module 1 si $|w| = 1$ et donc $g_k(z) = f_k(z/r)$ vérifie

$$g_k(z_k) = 0, \; |g_k(0)| = \frac{|z_k|}{r}, \; |g_k(z)| = 1 \text{ si } |z| = r.$$

Ainsi la fonction $g = f/(g_1 \cdots g_n)$ ne s'annule pas dans le disque de rayon r centré en 0 donc on peut choisir une branche de $\log g$ dans ce disque. La partie réelle de $\log g$ est $\log|g|$ et la première formule permet de conclure.

2. Il suffit de développer l'intégrale

$$\int_0^r \frac{n(s)}{s} ds = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{|z_k|}^{|z_{k+1}|} k \frac{ds}{s} + n \int_{|z_{k+1}|}^{r} \frac{ds}{s} = \sum_{k=1}^{n-1} k(\log|z_{k+1}| - \log|z_k|) + n(\log r - \log|z_{k+1}|)$$

Finalement, on utilise la sommation par partie pour obtenir

$$\int_0^r \frac{n(s)}{s} ds = n \log r - \sum_{k=1}^{n} \log|z_k|.$$

C'est ce qu'on voulait.

3. Le terme de droite de la formule de Jensen est au plus $\log M(r)$ et la fonction n est croissante donc

$$\int_0^{2r} \frac{n(s)}{s} ds \geqslant \int_r^{2r} \frac{n(r) ds}{s} = n(r) \log 2.$$

En appliquant la formule de Jensen pour $2r$ au lieu de r on obtient l'estimation voulue avec $C = |\log|f(0)|/\log 2|$.

Exercice 4. Fonctions d'ordre finis

1. D'après le critère de convergence uniforme établi au premier exercice, sous ces hypothèse, la convergence uniforme est claire. On va montrer que $|P(z)| \leqslant \exp(C|z|^{p+1})$ pour une constante C que l'on déterminera. Si $z \geqslant \frac{1}{2}$ on obtient

$$|W_p(z)| \leqslant (1 + |z|) \exp(p|2z|^p) \leqslant 3|z| \exp(p|2z|^p) \leqslant \exp((p+1)|2z|^{p+1})$$

puisque $3|z| \leqslant \exp(3|z|) \leqslant \exp(|2z|^{p+1})$ si $2|z| \geqslant 1$. En combinant cette estimation avec celle de la première question du premier exercice, puisque $\log|W_p(z)| = \Re \log W_p(z) \leqslant |\log W_p(z)|$ on obtient

$$\left| W_p\left(\frac{z}{z_k}\right) \right| \leqslant \exp\left(C_0 \frac{|z|^{p+1}}{|z_k|^{p+1}} \right), \ C_0 = (p+1)2^{p+1}$$

donc l'inégalité voulue s'obtient avec $C = C_0 \sum_k 1/|z_k|^{p+1}$.

2. On remplace f par $z^{-d} f$ si nécessaire et on suppose que $f(0) \neq 0$. D'après la dernière question de l'exercice précédent et l'hypothèse sur l'ordre on obtient que pour $\varepsilon > 0$

$$n(r) \leqslant C_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon}$$

En posant $r = |z_n|$ on obtient $n \leqslant C_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon}$ ou

$$\frac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si on se donne $\sigma > \rho$ et on choisit ε tel que $\rho + \varepsilon < \sigma$ on obtient

$$\frac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{n^\tau}\right), \ \tau = \frac{\sigma}{\rho+\varepsilon} > 1.$$

Ceci conclut la preuve.

3. D'après le premier exercice on a la factorisation voulue et il suffit de montrer que Q est un polynôme de degré $\leqslant n = [\rho]$. On peut supposer que $f(0) \neq 0$, on va montrer que la dérivée $n+1$-ième de Q est nulle. On considère la dérivée logarithmique de f,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z_m - z} - q_m'(z) \right] + Q'(z),$$

où $q_m(z) = \frac{z}{z_m} + \frac{z^2}{2z_m^2} + \cdots + \frac{z^p}{pz_m^p}$. Or on sait que $p+1$ est au plus le plus petit entier $> \rho$, donc $p \leqslant n$. On dérive n fois la dérivée logarithmique pour obtenir

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(n)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n!}{(z_m - z)^{n+1}} + Q^{(n+1)}.$$

Posons pour $R > 0$ un réel

$$g_R(z) = \frac{f(z)}{f(0)} \prod_{|z_m| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right)^{-1}.$$

Notons que g_R est une fonction entière qui n'a pas de zéro de module $\leqslant R$, et $g_R(0) = 1$ ce qui nous permet de prendre une branche du logarithme $h_R(z) = \log g_R(z)$ lorsque $|z| \leqslant R$. On obtient

$$h_R^{(n+1)}(z) = \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{(n)} + \sum_{|z_m| \leqslant R} \frac{n!}{(z_m - z)^{n+1}} = Q^{(n+1)} - \sum_{|z_m| > R} \frac{n!}{(z_m - z)^{n+1}}.$$

L'étape finale est d'estimer $h_R^{(n+1)}$. Si $|z| = 2R$ alors chaque $\left(1 - \frac{z}{z_m}\right)^{-1}$ dans le produit de g_r est de module $\leqslant 1$, donc

$$|g_R(z)| \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| \leqslant e^{CR^{\rho+\varepsilon}}.$$

Par le principe du maximum, cette inégalité vaut si $|z| \leqslant R$. Donc pour $|z| \leqslant R$

$$\Re h_R(z) = \log|g_R(z)| \leqslant CR^{\rho+\varepsilon}.$$

On utilise maintenant le lemme de la partie réelle [1] pour obtenir que pour $|z| = r < R$ on a

$$|h_R^{(n+1)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+3}(n+1)!}{(R-r)^{n+2}} CR^{\rho+1+\varepsilon}.$$

En particulier si $2|z| \leqslant R$,

$$|h_R^{(n+1)}(z)| \leqslant 2^{2n+5}(n+1)! CR^{\rho+\varepsilon-(n+1)}.$$

Combiné à l'expression de $|h_R^{(n+1)}(z)|$ on en déduit que pour $|z| \leqslant R/2$:

$$|Q^{(n+1)}(z)| \leqslant 2^{2n+5}(n+1)! CR^{\rho+\varepsilon-(n+1)} + n! 2^{n+1} \sum_{|z_m| > R} \frac{1}{|z_m|^{n+1}}.$$

Pour ε assez petit le premier terme à droite tend vers 0 lorsque $R \to \infty$ et comme la somme de la série converge il en est de même pour le second terme. Ainsi $Q^{(n+1)}$ est identiquement nul.

Applications

Exercice 5. Factorisation d'Hadamard de la fonction ξ de Riemann

1. C'est dans le cours.
2. Comme on a la symétrie $\xi(s) = \xi(1-s)$ on peut se restreindre au demi plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re s \geqslant \frac{1}{2}\}$. Si $\Re s \geqslant 2$ on obtient

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\Re s}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dans la bande $\frac{1}{2} \leqslant \Re s < 2$ on utilise une formule du cours

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx,$$

où $f(x) = (e^x - 1)^{-1} - 1/x + 1/2 = O(x)$ lorsque $x \to 0$ ce qui donne une constante C telle que

$$\left|\Gamma(s)\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| \leqslant C, \ \frac{1}{2} \leqslant \Re s < 2.$$

Or

$$|\Gamma(s)| \geqslant \Re\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} \Re(t^{s-1}) dt$$

1. Qui donne $\sup_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n! 2^{n+2} R}{(R-r)^{n+1}} (A(R) + |f(0)|)$.

qui est borné inférieurement dès que $1/2 \leqslant \Re s \leqslant 2$. On sait que ζ a un pôle simple de résidu 1 en $s = 1$ donc l'estimation implique que

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| \leqslant C',\ \frac{1}{2} \leqslant \Re s < 2.$$

Finalement, on obtient que $|\xi(s)|$ est dominé par

$$|s|^2 \left[1 + \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right],\ \Re s \geqslant \frac{1}{2}.$$

On utilise alors la formule de Stirling pour obtenir $|\xi(s)| = O(e^{|s|\log s})$ ce qui prouve que ξ est d'ordre 1. On peut montrer que cette estimation est optimale.

3. D'après le théorème d'Hadamard, le produit canonique de ξ est de la forme

$$\prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}.$$

La symétrie $\xi(s) = \xi(1-s)$ implique que les zéros $\neq 1/2$ viennent par paire $\{\rho, 1-\rho\}$ donc le produit des deux termes correspondants dans le produit donnent

$$\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) e^{s/(1-\rho)} = \underbrace{\frac{\rho - s}{\rho} \frac{1-\rho-s}{1-\rho}}_{\frac{\rho - s - \rho^2 + s^2}{\rho(1-\rho)}} \exp\left(\frac{s}{\rho(1-\rho)}\right) = \left(1 - \frac{s(1-s)}{\rho(1-\rho)}\right) \exp\left(\frac{s}{\rho(1-\rho)}\right).$$

Or $1/\rho(1-\rho) = O(|\rho|^{-2})$ qui est le terme général d'une série convergente puisque ξ est d'ordre 1. Ainsi le produit

$$\exp\left(\sum_{\rho} \frac{s}{\rho(1-\rho)}\right) \prod \left(1 - \frac{s(1-s)}{\rho(1-\rho)}\right),$$

est absolument convergent et on déduit alors du théorème de factorisation que que

$$\xi(s) = e^{Q(s)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right).$$

où Q est un polynôme de degré au plus 1. Mais alors l'invariance sous $s \mapsto 1 - s$ de ξ et du produit assure qu'il en est de même pour Q qui est donc de degré nul. Ceci conclut la preuve.